Julia-verzamelingen en de Mandelbrot-verzameling

Dieter van Melkebeek* en Marc Van Barel
Departement Computerwetenschappen
K.U. Leuven

In deze bijdrage behandelen we twee bijzondere types van fractalen, namelijk Julia-verzamelingen en de hiermee nauw verwante Mandelbrot-verzameling. Naast de definitie van deze concepten en hun belangrijkste eigenschappen, zullen we voornamelijk methodes bespreken om ze te berekenen. Tot slot zullen we aangeven hoe het fenomeen van de periodeverdubbeling zich voor de familie van de logistieke afbeeldingen manifesteert in de overeenkomstige Julia-verzamelingen en in de Mandelbrot-verzameling.

1 Julia-verzamelingen

Julia-verzamelingen zijn deelverzamelingen van het complexe vlak $\mathbb{C}$ die geassocieerd zijn met meromorfe functies op $\mathbb{C}$, i.e. verhoudingen van complexe functies die analytisch zijn over heel $\mathbb{C}$. Ze zijn genoemd naar de Franse wiskundige Gaston Julia, die gelijktijdig met zijn landgenoot Pierre Fatou tijdens de Eerste Wereldoorlog begonnen is met de studie van wat nu bekend staat als Julia-verzamelingen van rationale complexe functies. Wij zullen ons in deze bijdrage beperken tot Julia-verzamelingen van complexe veeltermen, en wel van graad minstens 2. Julia-verzamelingen van constante en van lineaire complexe veeltermen zijn triviaal (ze bevatten geen enkel of juist één punt) en voldoen niet aan alle eigenschappen die verderop besproken worden.

1.1 Definitie en belangrijke eigenschappen

De Julia-verzameling van een complexe veelterm P ($P \in \mathbb{C}[z]$) wordt volledig bepaald door het gedrag van de iteraties van P. De iteraties van een transformatie zijn de transformaties die men bekomt door de gegeven transformatie een aantal keer na elkaar toe te passen. Formeel kunnen ze als volgt gedefinieerd worden.

Definitie 1 (iteraties van een transformatie) *Weze T een transformatie, dan is*

$$\begin{aligned} T^{\circ 0} &= id \\ T^{\circ(k+1)} &= T \circ T^{\circ k} \end{aligned}$$

voor $k \in \mathbb{N}$, waarbij id de identieke transformatie voorstelt. $T^{\circ k}$ wordt de iteratie van orde k genoemd.

*Aspirant N.F.W.O.

De k-de orde iteratie van P is een veelterm van graad d^k, indien P van graad d is.
De rij van punten die men bekomt door de rij van iteraties te evalueren in een bepaald punt, wordt de orbitaal van dat punt genoemd. Ze wordt bekomen door uitgaande van het gegeven punt telkens op het voorgaande punt de transformatie toe te passen.

Het gedrag van de iteraties van P weerspiegelt zich in de ligging van hun vaste punten, dit zijn de periodieke punten van P. Ze kunnen op basis van hun periode en van hun zogenaamde eigenwaarde geclassificeerd worden, zoals weergegeven in de volgende definitie.

Definitie 2 (periodiek punt) *Weze T een transformatie en z_o een element van het domein van T, dan is z_o een periodiek punt van T asa $\exists\, k \in \mathbb{N}_o : T^{\circ k}(z_o) = z_o$.*
De periode p van z_o is $p = \min\{k \in \mathbb{N}_o \,|\, T^{\circ k}(z_o) = z_o\}$.
Indien T een transformatie is op $\mathbb{C}$ en analytisch is in z_o, dan is de eigenwaarde van z_o

$$\lambda(z_o) = \left.\frac{d}{dz}T^{\circ p}(z)\right|_{z=z_o}$$

$$\begin{array}{lrll} \textit{en } z_o \textit{ heet dan} & \textit{superattractief} & \textit{asa} & \lambda(z_o) = 0 \\ & \textit{attractief} & \textit{asa} & 0 < |\lambda(z_o)| < 1 \\ & \textit{indifferent} & \textit{asa} & |\lambda(z_o)| = 1 \\ & \textit{repulsief} & \textit{asa} & |\lambda(z_o)| > 1. \end{array}$$

De periode p van een periodiek punt z_o geeft ook het aantal verschillende punten in zijn orbitaal aan. Indien z_o superattractief of attractief is, worden alle punten uit een voldoend kleine omgeving van z_o onder $T^{\circ p}$ naar z_o toe getrokken. Indien z_o repulsief is, worden ze (behalve z_o zelf uiteraard) onder $T^{\circ p}$ van z_o weg getransformeerd. We merken op dat de eigenwaarde $\lambda(z_o)$ van z_o voor alle punten van de cyclus $(T^{\circ k}(z_o))_{k=0}^{p-1}$ dezelfde is en dus eigenlijk een karakteristiek van de cyclus is. Door toepassing van de kettingregel blijkt immers dat $\lambda(z_o) = \prod_{k=0}^{p-1} T'(T^{\circ k}(z_o))$.

De Julia-verzameling van P is nu de afsluiting van de verzameling repulsieve periodieke punten van P. Ze bevat dus alle punten die willekeurig dicht door een repulsief periodiek punt kunnen benaderd worden of er zelf één zijn.

Definitie 3 (Julia-verzameling) *Weze $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2, dan is de Julia-verzameling $J(P)$ van P*

$$J(P) = \overline{\{z_o \in \mathbb{C} \mid \exists\; k \in \mathbb{N}_o :\; P^{\circ k}(z_o) = z_o \;\textit{en}\; |\lambda(z_o)| > 1\}}.$$

De Julia-verzameling van P is dus een gesloten verzameling. Men kan aantonen dat ze steeds een overaftelbaar aantal punten bevat. Uit de definitie volgt onmiddellijk dat $J(P)$ invariant is onder P. Ze is tevens invariant onder P^{-1} en dus volledig invariant onder P:

$$P(J(P)) = J(P) = P^{-1}(J(P)).$$

De beperking van P tot $J(P)$ definieert bijgevolg een (surjectieve) transformatie op $J(P)$. Omwille van het feit dat de repulsieve periodieke punten van P dicht zijn in $J(P)$, is het gedrag van deze transformatie chaotisch: de orbitalen van de meeste punten van $J(P)$ zijn dicht in $J(P)$ en ze zijn zeer sterk onderhevig aan perturbaties op het startpunt.
Een andere eigenschap die hiermee nauw samenhangt, stelt dat als men van het stuk van $J(P)$

gelegen in een willekeurig kleine omgeving $N(z_o)$ van een punt $z_o \in J(P)$ vertrekt, men na een eindig aantal iteraties hierop toe te passen heel $J(P)$ bekomt:

$$\forall\, z_o \in J(P),\, \forall\, N(z_o),\, \exists\, k \in \mathbb{N} :\, P^{\circ k}(N(z_o) \cap J(P)) = J(P). \tag{1}$$

Deze eigenschap vormt de basis voor het fractale uitzicht van de meeste Julia-verzamelingen, zoals zelf-gelijkvormigheid dat is voor fractalen als de Cantor-verzameling, de Koch-kromme en de Sierpinski-zeef. Ze geeft weer hoe men uitgaande van een fractie van zulke verzameling, haar op een eenvoudige manier helemaal kan reconstrueren, in het geval van Julia-verzamelingen door toepassing van veeltermtransformaties, in andere gevallen door toepassing van affiene transformaties.

Daar waar definitie 3 en de vorige eigenschappen algemeen geldig zijn voor Julia-verzamelingen, is de volgende specifiek voor Julia-verzamelingen van complexe veeltermen. Ze stelt dat de Julia-verzameling van een complexe veelterm ook kan bepaald worden als de rand van het zogenaamde aantrekkingsgebied van het punt op oneindig voor die veelterm, i.e. de verzameling van alle punten die onder de veelterm naar het punt op oneindig convergeren.

Eigenschap 1 *Weze $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2, dan geldt dat*

$$\begin{aligned} J(P) &= \partial A_P(\infty), \\ &\textit{met } A_P(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid \lim_{k\to\infty} P^{\circ k}(z) = \infty\}. \end{aligned}$$

Het complement van $A_P(\infty)$ wordt de opgevulde Julia-verzameling van P genoemd en met $K(P)$ genoteerd. Per definitie bevat $K(P)$ dus alle punten waarvan de orbitalen onder P hetzij niet convergeren, hetzij naar een eindige waarde convergeren, m.a.w. begrensd blijven. Volgens eigenschap 1 geldt dat $J(P) = \partial K(P)$. Aangezien $A_P(\infty)$ een omgeving van het punt ∞ omvat, zijn $K(P)$ en $J(P)$ begrensd. $K(P)$ is als complement van de open verzameling $A_P(\infty)$ ook gesloten, net als $J(P)$.

Het complement van $J(P)$ zelf wordt de Fatou-verzameling van P genoemd. Ze is open en volledig invariant onder P.

1.2 Voorbeelden

In deze paragraaf zullen we twee Julia-verzamelingen expliciet bepalen. Ze zullen een zeer eenvoudige geometrische vorm blijken te hebben, namelijk die van een cirkel en een lijnstuk, wat meteen betekent dat de gekozen voorbeelden helemaal niet representatief zijn. De meeste Julia-verzamelingen zijn immers fractalen in de zin dat hun topologische dimensie strikt kleiner is dan hun Hausdorff-dimensie, en hebben dus geen eenvoudige geometrische vorm. Het is zelfs zo dat cirkels en lijnstukken de enige uitzonderingen zijn die wij kennen. Daardoor geven ze evenwel aanleiding tot eenvoudige gesloten uitdrukkingen, wat ze interessant maakt om de definitie te illustreren.

We zullen ook één representatief voorbeeld geven. De lezer kan er naar believen andere genereren met behulp van het programma Fractint.

1.2.1 $P(z) = z^2$

We zullen $J(P)$ op twee manieren bepalen: eerst rechtstreeks via de definitie 3 en vervolgens door toepassing van eigenschap 1. Voor beide methodes kunnen we gebruik maken van een gesloten uitdrukking voor de iteraties van P.

iteraties van P
In dit geval is die uitdrukking zeer eenvoudig, namelijk $P^{\circ k}(z) = z^{2^k}$ $(k \in \mathbb{N})$.

$J(P)$ via definitie 3
De periodieke punten waarvan de periode een deler is van $k \in \mathbb{N}_o$, zijn de oplossingen van de vergelijking $z^{2^k} = z$. Enkel de oplossing $z = 0$ is niet repulsief. De overige zijn de hoekpunten van de regelmatige $(2^k - 1)$-hoek ingeschreven in de eenheidscirkel en met het punt 1 als één van zijn hoekpunten. Het is duidelijk dat men elk punt van de eenheidscirkel willekeurig dicht door zo een hoekpunt kan benaderen, mits k voldoende groot te kiezen, en geen enkel ander punt. De Julia-verzameling van $P(z) = z^2$ is bijgevolg de eenheidscirkel: $J(P) = C_1$.

$J(P)$ via eigenschap 1
We bepalen eerst het aantrekkingsgebied van ∞ voor P. Aangezien $|P^{\circ k}(z)| = |z|^{2^k}$, geldt dat $\lim_{k\to\infty} P^{\circ k}(z) = \infty$ asa $|z| > 1$. Dit betekent dat $A_P(\infty) = \mathrm{ext}(C_1)$, en dus $J(P) = \partial A_P(\infty) = C_1$.

1.2.2 $P(z) = z^2 - 2$

We leiden eerst weer een gesloten uitdrukking voor de iteraties van P af. Vervolgens bepalen we $J(P)$ via eigenschap 1, wat in dit geval iets eenvoudiger is dan via de definitie, omdat we over geen gesloten uitdrukking voor de periodieke punten van P beschikken.

iteraties van P
Het bepalen van de iteraties van P is hier heel wat moeilijker dan voor de veelterm z^2. Een 'ad hoc'-oplossingsmethode bestaat erin volgende transformatie door te voeren. Stel voor elke $k \in \mathbb{N}$, $P^{\circ k}(z) = 2\cos(\theta_k(z))$. Men kan steeds een functie $\theta_k(z)$ vinden zodat aan deze betrekking voldaan is. Ze zal over het algemeen complexe waarden aannemen en is niet eenduidig bepaald, maar bestaat dus wel. Het is dan voor elke $k \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\begin{aligned} P^{\circ(k+1)}(z) &= 2\cos(\theta_{k+1}(z)) \\ &= (2\cos(\theta_k(z)))^2 - 2 = 2\cos(2\theta_k(z)), \end{aligned}$$

waaraan voldaan is door $\theta_{k+1}(z) = 2\theta_k(z)$ te stellen, of dus door $\theta_k(z) = 2^k\theta_0(z)$ te stellen. Zodoende bekomt men voor elke $k \in \mathbb{N}$ dat

$$P^{\circ k}(z) = 2\cos(2^k\theta_0(z)), \tag{2}$$

en dus ondermeer dat

$$z = 2\cos(\theta_0(z)). \tag{3}$$

Opmerking (voor diegenen die vertrouwd zijn met Chebyshev-veeltermen):

$$P^{\circ k}(z) = 2T_{2^k}(\frac{z}{2}).$$

$J(P)$ via eigenschap 1
Om het aantrekkingsgebied van ∞ te bepalen, maken we een onderscheid naargelang $\theta_0(z)$ al dan niet reëel kan gekozen worden. Uit (3) blijkt dat dit mogelijk is asa $z \in [-2, 2]$.

- $z \in [-2, 2]$
  In dit geval blijft het argument $\theta_k(z)$ in (2) reëel. De orbitaal van z is dus volledig in het interval $[-2, 2]$ gelegen: $z \notin A_P(\infty)$.

- $z \notin [-2, 2]$
  Aangezien $\theta_0(z)$ niet zuiver reëel is, geldt dat $|\Im(\theta_k(z))| = 2^k|\Im(\theta_0(z))| \to \infty, k \to \infty$. Een eigenschap van de complexe cosinus-functie zegt bovendien dat $\forall\, \zeta \in \mathbb{C} : \; |\cos(\zeta)|^2 \geqslant \cosh^2(\Im(\zeta)) - 1$. Toegepast met $\zeta = \theta_k(z)$ levert dit tesamen met (2) dat $z \in A_P(\infty)$.

Bijgevolg is $A_P(\infty) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, en dus $J(P) = \partial A_P(\infty) = [-2, 2]$.

1.2.3 $P(z) = z^2 - 1$

De Julia-verzameling van deze veelterm is een fractaal: haar Hausdorff-dimensie is strikt groter dan haar topologische dimensie, die 1 is. Ze is weergegeven in figuur 1.

De Julia-verzameling verdeelt de Fatou-verzameling in verschillende componenten, in dit geval aftelbaar veel. Elk van die componenten wordt onder P op een (andere) component afgebeeld en is zelf het beeld van twee componenten, behalve de onbegrensde component, die precies $A_P(\infty)$ uitmaakt en dus volledig invariant is onder P. We raden de lezer aan op figuur 1 na te gaan hoe dit precies gebeurt, en zich zo een beeld te vormen van de dynamica van P. Op die manier kan hij/zij ook formule (1) verifiëren en inzien hoe ze de basis vormt voor de fractale structuur van Julia-verzamelingen. Uitgangspunt bij deze analyse is het feit dat de punten $z = 0$ en $z = -1$ een superattractieve cyclus van periode 2 vormen. Extra aandacht moet besteed worden aan de wijze waarop de component die het kritische punt $z = 0$ bevat, wordt getransformeerd.

1.3 Berekening

Zoals reeds gezegd, vertonen de meeste Julia-verzamelingen zulke ingewikkelde fractale structuur. Om er zich een beeld van te vormen, kan men ze, uiteraard benaderend, berekenen met een computer en ze op een scherm voorstellen of er een afdruk van maken zoals figuur 1. Voor die berekening bestaan er twee gangbare methodes, die we nu zullen behandelen. De eerste maakt gebruik van inverse iteraties en werd toegepast om figuur 1 te maken. De tweede is gebaseerd op eigenschap 1 en vormt de kern van de routines van het programma Fractint om Julia-verzamelingen te genereren.

1.3.1 Methode van de inverse iteraties

Deze methode steunt op de volgende eigenschap, die aangeeft hoe uit één enkel punt van de Julia-verzameling de hele Julia-verzameling kan geconstrueerd worden. Ze stelt dat de unie van alle inverse iteraties van de veelterm geëvalueerd in dat punt dicht is in de Julia-verzameling en er dus een perfecte benadering voor vormt.

Eigenschap 2 *Weze $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2. Als $z_o \in J(P)$, dan geldt dat*

$$J(P) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{N} : \; P^{\circ k}(z) = z_o\}},$$

of nog,

$$J(P) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} (P^{\circ k})^{-1}(z_o)}.$$

Figure 1: Julia-verzameling van de veelterm $P(z) = z^2 - 1$.

Het ligt dus voor de hand om als benadering voor $J(P)$ de unie van alle inverse iteraties in een punt $z_o \in J(P)$ tot en met een bepaalde orde *iter* te kiezen. Dit resulteert in het volgende algoritme.

Algoritme 1:

invoer: $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2
$\qquad$ $iter \in \mathbb{N}$
uitvoer: benadering J_{iter} voor $J(P)$

$\quad$ bepaal startpunt $z_o \in J(P)$
$\quad$ $J_0 \leftarrow \{z_o\}$
$\quad$ voor $k = 1(1)iter$
$\qquad$ $J_k \leftarrow J_{k-1} \cup P^{-1}(J_{k-1})$

De eerste stap van algoritme 1, het bepalen van een startpunt $z_o \in J(P)$, kan op de volgende twee manieren gebeuren.

- Voor sommige veeltermen $P \in \mathbb{C}[z]$ kan men gemakkelijk expliciet een element van $J(P)$ bepalen. Dit is ondermeer zo voor kwadratische veeltermen, waarvan de vaste punten kunnen bepaald worden als oplossingen van een kwadratische vergelijking. In het algemeen is het zo, dat minstens één van de vaste punten van een niet-lineaire $P \in \mathbb{C}[z]$ hetzij repulsief, hetzij eigenwaarde 1 heeft. In beide gevallen behoort dat punt tot $J(P)$. Het volstaat dus een kwadratische vergelijking op te lossen en een modulus-test uit te voeren op een eigenwaarde, om een element van de Julia-verzameling van een kwadratische complexe veelterm te vinden.

- Omdat de repulsieve periodieke punten van P dicht zijn in $J(P)$, kan men verwachten dat $J(P)$ een attractieve verzameling is voor P^{-1}. Deze eigenschap kan men aanwenden om een rij van punten te construeren die convergeert naar $J(P)$, door een willekeurig startpunt $\zeta_o \in \mathbb{C}$ te kiezen en in elke volgende stap een punt te berekenen dat onder P op het vorige punt wordt afgebeeld. Zulke rij blijkt inderdaad voor elke ζ_o met kans 1 naar $J(P)$ te convergeren, behalve in een aantal pathologische gevallen[1]. Als startpunt z_o in algoritme 1 kiezen we dan een punt met een voldoend hoge index uit zo een rij. Het feit dat vanwege de invariantie van $J(P)$ onder P^{-1}, z_o eigenlijk niet exact op $J(P)$ gelegen is, indien ζ_o er niet op ligt, vormt geen bezwaar, omdat we verderop in algoritme 1 hierop inverse iteraties toepassen, die de gegenereerde punten nog dichter bij $J(P)$ doen aansluiten.

Eigenschap 2 garandeert echter geenszins dat algoritme 1 goede resultaten oplevert voor beperkte waarden van *iter*. Daartoe zou vereist zijn dat de punten van J_k gelijkmatig verdeeld zijn over $J(P)$. Dat dit niet steeds het geval is, blijkt uit de volgende eigenschap.

Eigenschap 3 *Weze $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2 en $z_o \in J(P)$. Stel $J_k \triangleq (P^{\circ k})^{-1}(z_o)$ voor $k \in \mathbb{N}$, dan geldt dat de verdeling van J_k over $J(P)$ convergeert naar de logaritmische evenwichtsverdeling op $J(P)$, als $k \to \infty$.*

De logaritmische evenwichtsverdeling op $J(P)$ beschrijft de ladingsverdeling in het complexe vlak in de electrostatische evenwichtstoestand van een oneindig lang perfect geleidend regeloppervlak waarvan de beschrijvenden loodrecht op het complexe vlak staan en er een sectie $J(P)$ mee hebben, en waarop per lengte-eenheid volgens de as een zelfde ladingshoeveelheid is aangebracht. Ze wordt logaritmisch genoemd, omdat de potentiaal vanwege één enkele beschrijvende, die voorkomt in de integraaluitdrukking voor de totale potentiaal, een logaritmisch verloop heeft in functie van de afstand tot deze beschrijvende.
Uit deze fysische achtergrond van de logaritmische evenwichtsverdeling volgt dat ze voor een cirkel volledig homogeen is. De Julia-verzameling van de veelterm $P(z) = z^2$ kan dan ook krachtens eigenschap 3 zeer efficiënt gegenereerd worden met behulp van algoritme 1. In het algemeen zal het volgens diezelfde eigenschap echter zo zijn, dat de punten die het algoritme produceert, zich ophopen in uitstekende delen van de Julia-verzameling. Dit is reeds te merken in figuur 1. Figuur 2 geeft een voorbeeld weer waarbij dit een zeer slecht resultaat tot gevolg heeft, namelijk de Julia-verzameling van $P(z) = z^2 + 0.32 + 0.043j$. De linkerzijde stelt de benadering J_{16} voor zoals die door algoritme 1 berekend wordt. De rechterzijde is het resultaat van een methode voor de berekening van $K(P)$, waarvan de rand krachtens een gevolg van eigenschap 1 $J(P)$ is. Ze levert hier een preciezer resultaat na een vergelijkbare hoeveelheid rekenwerk. We gaan nu nader in op deze methode.

[1] Namelijk indien ζ_o een uitzonderingspunt is, zoals het punt $\zeta_o = 0$ voor de veelterm $P(z) = z^2$.

Figure 2: Benadering J_{16} voor de Julia-verzameling van de veelterm $P(z) = z^2 + 0.32 + 0.043j$ berekend met behulp van algoritme 1 (links) en de opgevulde Julia-verzameling van $P(z)$ berekend met behulp van algoritme 2 (rechts).

1.3.2 Detectie van $\partial A_P(\infty)$

Eigenschap 1 is de basis voor deze methode: $J(P) = \partial A_P(\infty)$. In principe komt ze dus neer op het detecteren van de rand van $A_P(\infty)$. Daarbij stellen er zich twee problemen, namelijk

- hoe we van een gegeven punt kunnen nagaan of het tot $A_P(\infty)$ behoort, en
- hoe we op basis van zulke routine de rand van $A_P(\infty)$ kunnen bepalen.

Beide worden benaderend opgelost.

Wat de randdetectie betreft, liggen er verschillende wegen open. Zo kunnen we als benadering voor $J(P)$ die pixels van het beeldscherm kiezen waarvan minstens één hoekpunt tot $A_P(\infty)$ behoort en minstens één er niet toe behoort. Van zulke pixels weten we met zekerheid dat ze punten van $J(P)$ bevatten. Het is echter best mogelijk dat pixels punten van $J(P)$ bevatten zonder aan de gestelde voorwaarde te voldoen en zonder dus opgenomen te worden in de benadering voor $J(P)$. In het extreme geval vinden we daardoor geen enkele van de pixels die punten van $J(P)$ bevatten. Deze situatie is niet denkbeeldig indien $K(P)$ geen inwendige punten bevat, zoals bijvoorbeeld indien $P(z) = z^2 - 2$, waarvoor $K(P) = [-2, 2]$: elk hoekpunt van elke pixel behoort tot $A_P(\infty)$, tenzij (het stuk $[-2, 2]$ van) de reële as precies door hoekpunten van pixels loopt. De methode van de inverse iteraties daarentegen, heeft met dit geval niet de minste moeilijkheden.

Om na te gaan of een punt tot $A_P(\infty)$ behoort, kunnen we als volgt te werk gaan. Indien we beschikken over een benadering $G \subset \mathbb{C}$ voor $A_P(\infty)$, zodanig dat $G \subseteq A_P(\infty)$ en een omgeving $N(\infty)$ van ∞ omvat, weten we dat $z_o \in \mathbb{C}$ behoort tot $A_P(\infty)$ asa de orbitaal van z_o onder P minstens één punt van G bevat (in feite oneindig veel). We kunnen dan nagaan of er zich onder de eerste *maxiter* + 1 punten van die orbitaal minstens één in G bevindt. Zo ja, weten we dat $z_o \in A_P(\infty)$. Zo neen, vermoeden we dat $z_o \notin A_P(\infty)$: het zou nog kunnen dat $z_o \in A_P(\infty)$, maar dat zouden we dan kunnen constateren door de waarde van *maxiter* voldoende groter te kiezen. Dit levert het volgende algoritme op.

Algoritme 2: $z_o \in A_P(\infty)$ **?**

invoer: $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2
$z_o \in \mathbb{C}$
$G \subset \mathbb{C}$ zodat $N(\infty) \subset G \subseteq A_P(\infty)$
$maxiter \in \mathbb{N}$
uitvoer: indien $\{P^{\circ k}(z_o)\}_{k=0}^{maxiter} \cap G \neq \varnothing$
dan ja
anders neen

$z \leftarrow z_o$
$k \leftarrow 0$
zolang $z \notin G$ en $k < maxiter$
  $z \leftarrow P(z)$
  $k \leftarrow k + 1$
indien $z \in G$ dan antwoord ja
  anders antwoord neen

Het is duidelijk dat dit algoritme bij een bepaalde keuze van P en $G \neq A_P(\infty)$ voor des te minder punten $z_o \in A_P(\infty)$ tot een foutief besluit komt, indien men *maxiter* opvoert, maar dat het dan voor punten $z_o \notin A_P(\infty)$ meer werk vergt om tot dit besluit te komen. Wat de rol van het gebied G betreft, is het klaar dat het algoritme voor een zelfde P en een zelfde waarde van *maxiter* betere resultaten levert, naarmate G beter aansluit bij $A_P(\infty)$, en dit zelfs met minder werk, afgezien van het feit dat de test $z \notin G$ in algoritme 2 allicht meer bewerkingen vergt.

De vraag stelt zich nog hoe we een gebied G kunnen construeren dat aan de gestelde voorwaarden voldoet, uitgaande van de veelterm $P(z) \triangleq \sum_{i=0}^{n} p_i z^i$ van graad $n > 1$. Dit is mogelijk door te steunen op het feit dat als $|z|$ voldoende groot is, $|P(z)|$ gedomineerd wordt door de hoogstemachtsterm en strikt groter is dan $|z|$, zodat $|P^{\circ k}(z)|$ monotoon naar ∞ stijgt als $k \to \infty$. Vertaald in termen van de invoer van algoritme 2 betekent dit dat we $G = \mathrm{ext}(C_R)$ kiezen, dit is het uitwendige van de cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal R, met R voldoende groot, namelijk

$$R \geqslant \max\left\{1, \frac{1 + \sum_{i=0}^{n-1} |p_i|}{|p_n|}\right\}.$$

Zulk gebied G omvat uiteraard een omgeving van ∞, en ligt wel degelijk in $A_P(\infty)$, want als $z \in G = \text{ext}(C_R)$, geldt dat

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geqslant |p_n z^n| - |\sum_{i=0}^{n-1} p_i z^i| \\ &\geqslant |p_n||z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |p_i||z|^i \\ &\geqslant |p_n||z|^n - \left(\sum_{i=0}^{n-1} |p_i|\right) |z|^{n-1} \\ &= |z|^{n-1} \left(|p_n||z| - \sum_{i=0}^{n-1} |p_i|\right) \\ &> |z|^{n-1} \geqslant |z|, \end{aligned}$$

zodat $\lim_{k\to\infty} P^{\circ k}(z) = \infty$.
Bovendien biedt deze keuze van G het voordeel dat de test of een punt ertoe behoort, zeer eenvoudig is, en nog een ander voordeel dat verderop ter sprake komt. Om al deze redenen kiest men in de praktijk G dan ook zo.

Eigenlijk wordt in algoritme 2 meer informatie bepaald dan alleen of een punt $z_o \in \mathbb{C}$ al dan niet tot $A_P(\infty)$ behoort. Indien men tot het besluit komt, dat $z_o \in A_P(\infty)$, heeft men ook de kleinste orde $k^*(z_o)$ van een iteratie die het punt z_o in het gebied G brengt, bepaald. Dit wordt geëxpliciteerd in volgende aangepaste versie van algoritme 2.

Algoritme 3: $z_o \in A_P(\infty)$ **?**

invoer: $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2
$z_o \in \mathbb{C}$
$G \subset \mathbb{C}$ zodat $N(\infty) \subset G \subseteq A_P(\infty)$
$maxiter \in \mathbb{N}$
uitvoer: indien $\{P^{\circ k}(z_o)\}_{k=0}^{maxiter} \cap G \neq \varnothing$
dan $k^* \triangleq \min\{0 \leqslant k \leqslant maxiter \mid P^{\circ k}(z_o) \in G\}$
anders neen

```
z ← z_o
k ← 0
zolang z ∉ G en k < maxiter
    z ← P(z)
    k ← k + 1
indien z ∈ G dan antwoord k
              anders antwoord neen
```

Deze extra informatie kan men gebruiken om met elk punt $z_o \in \mathbb{C}$ een kleur te associëren, door namelijk aan elke mogelijke waarde voor k^* en aan de uitvoer neen van algoritme 3 een bepaalde kleur te koppelen. Omdat men de waarde van k^* kan aanzien als een maat voor de afstand tot het gebied G, levert dit kleurbanden op tussen $K(P)$ (gekleurd overeenkomstig uitvoer neen) en G (gekleurd overeenkomstig uitvoer $k^* = 0$). Bovendien heeft k^* een meer specifieke fysische betekenis, indien men $G = \text{ext}(C_R)$ kiest. De contouren van de verschillende kleurgebieden convergeren dan namelijk naar equipotentiaallijnen van de logaritmische evenwichtsverdeling op $J(P)$, indien $R \to \infty$.

Het is op deze manier dat Fractint kleurenbeelden van Julia-verzamelingen genereert: de verschillende pixels van het scherm worden overlopen, waarbij op een bepaald punt van elke pixel (bijvoorbeeld het midden) algoritme 3 wordt toegepast en de pixel overeenkomstig de uitvoer ervan wordt gekleurd. De lezer kan dit nagaan door Fractint de geconstrueerde orbitalen te laten tekenen tijdens de uitvoering van het algoritme.
Om de uitvoering te versnellen maakt Fractint gebruik van eventuele symmetrieën in de Julia-verzameling, test het de onderzochte orbitalen op periodiciteit en wordt de nauwkeurigheid waarmee de berekeningen uitgevoerd worden, aangepast. Om snel een beeld te krijgen, wordt eventueel gebruik gemaakt van heuristische schattingen en wordt het algoritme eerst op een ruw pixelrooster toegepast, dat nadien verfijnd wordt.

2 Mandelbrot-verzameling

De lezer die al wat geëxperimenteerd heeft met het programma Fractint, zal al gemerkt hebben, dat er een enorme verscheidenheid aan Julia-verzamelingen bestaat. Eén van de eigenschappen op basis waarvan men ze kan indelen, is of ze al dan niet samenhangend zijn. Dit heeft de Franse ingenieur Benoît Mandelbrot in 1980 ertoe gebracht een nieuwe deelverzameling van $\mathbb{C}$ te definiëren, die naderhand naar hem genoemd werd. Haar belang reikt veel verder dan het onderscheid tussen samenhangende en niet-samenhangende Julia-verzamelingen: ze blijkt een (in de huidige stand van de wetenschap) bijna volledige classificatie van Julia-verzamelingen van kwadratische complexe veeltermen toe te laten.

2.1 Definitie

Een Mandelbrot-verzameling kan geassocieerd worden aan elk geparametriseerd complex meromorf systeem, i.e. een afbeelding $\mathcal{P}$ van een parameterruimte Λ naar de verzameling van de meromorfe functies op $\mathbb{C}$. Ze wordt gedefinieerd als de verzameling van alle parameterwaarden λ waarvoor de Julia-verzameling van de overeenkomstige functie $\mathcal{P}(\lambda)$ samenhangend is:

$$M_{\mathcal{P}} \triangleq \{\lambda \in \Lambda \mid J(\mathcal{P}(\lambda)) \text{ samenhangend } \}.$$

Als men het heeft over dé Mandelbrot-verzameling, past men deze algemene definitie toe op het geparametriseerde complexe veeltermsysteem

$$\mathcal{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[z] : c \to z^2 + c,$$

wat resulteert in de volgende definitie.

Definitie 4 (Mandelbrot-verzameling)

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid J(z^2 + c) \textit{ samenhangend } \right\}$$

De Mandelbrot-verzameling is dus een deelverzameling van het complexe vlak en kan als dusdanig voorgesteld worden op een computerscherm, net als Julia-verzamelingen. Fractint biedt daartoe de mogelijkheid. De rand van de Mandelbrot-verzameling is weergegeven in het bovenste deel van figuur 4.

De Mandelbrot-verzameling is een zeer intrigerende verzameling die nog steeds niet helemaal doorgrond is. Ze is zelf gesloten en samenhangend. In feite is ze geen fractaal volgens de definitie van Mandelbrot, omdat haar Hausdorff-dimensie gelijk is aan haar topologische dimensie (namelijk 2), maar haar rand is het wel. In die rand zijn vormen te ontdekken die een sterke overeenkomst vertonen met de Julia-verzameling overeenkomstig parameterwaarden uit de beschouwde omgeving, en de gelijkenis wordt des te groter naarmate men meer inzoemt. De Mandelbrot-verzameling bevat ook haast identieke verkleinde copies van zichzelf, zoals bijvoorbeeld de secundaire Mandelbrot-verzameling, die zich situeert in de omgeving van het punt $c \simeq -1.76$ op de reële as. We raden de lezer aan eens in te zoemen op zulke plaatsen met behulp van het programma Fractint.

2.2 Berekening

De algoritmen die Fractint gebruikt om de Mandelbrot-verzameling te berekenen, zijn gebaseerd op de volgende stelling, die de belangrijke rol illustreert van kritische punten in de dynamica van complexe veeltermen.

Stelling 1 *Weze $P \in \mathbb{C}[z]$ van graad minstens 2, dan is $J(P)$ samenhangend asa geen enkel eindig kritisch punt van P in $A_P(\infty)$ gelegen is.*

De kritische punten van P zijn, naast het punt ∞, de nulpunten van de afgeleide P' van P. Voor veeltermen van de vorm $P(z) = z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$ is het punt $z = 0$ het enige eindige kritische punt, wat resulteert in volgend gevolg van stelling 1.

Gevolg 1 $M = \{c \in \mathbb{C} \,|\, 0 \notin A_{z^2+c}(\infty)\}$

De Mandelbrot-verzameling bevat dus alle parameters $c \in \mathbb{C}$ waarvoor de orbitaal van het punt $z = 0$ onder de overeenkomstige veelterm $P_c(z) \triangleq z^2 + c$ niet naar ∞ convergeert. Om dit laatste te testen, hebben we eigenlijk al een benaderende methode uitgewerkt in de paragraaf over de berekening van Julia-verzamelingen via detectie van de rand van $A_P(\infty)$. We losten het probleem of een punt $z_o \in \mathbb{C}$ tot $A_P(\infty)$ behoort op, door na te gaan of er zich onder de eerste *maxiter* + 1 punten van de orbitaal van z_o onder P minstens één in een gebied G bevindt, waarbij G voldoet aan $N(\infty) \subset G \subseteq A_P(\infty)$. We hebben ook gezien hoe we zo een gebied G kunnen construeren uitgaande van P. Deze procedure zouden we kunnen toepassen met $z_o = 0$ en $P = P_c$. Doordat we de procedure enkel in die gevallen gebruiken, kunnen we ze echter verbeteren, meer bepaald door de constructie van het gebied G onafhankelijk van P_c en dus van c te maken, zodat het niet voor elke onderzochte waarde van c opnieuw moet bepaald worden. De eisen die aan zulk gebied G gesteld worden, moeten zodanig zijn, dat een punt $z_o \in \mathbb{C}$ tot het complement M^c van de Mandelbrot-verzameling behoort asa de orbitaal van $z = 0$ onder P_c minstens één punt van G bevat (in feite oneindig veel), namelijk:

- $\forall c \in \mathbb{C} : \{P_c^{\circ k}(0)\}_{k=0}^{\infty} \cap G \neq \varnothing \;\Rightarrow\; 0 \in A_{P_c}(\infty)$
- $N(\infty) \subset G$.

We bekomen aldus het volgende algoritme, analoog aan algoritme 2.

Algoritme 4: $c \in M$ **?**

invoer: $c \in \mathbb{C}$

$G \subset \mathbb{C}$ zodat $\{P_c^{\circ k}(0)\}_{k=0}^{\infty} \cap G \neq \varnothing \ \Rightarrow \ 0 \in A_{P_c}(\infty)$

en $N(\infty) \subset G$

$maxiter \in \mathbb{N}$

uitvoer: indien $\{P_c^{\circ k}(0)\}_{k=0}^{maxiter} \cap G \neq \varnothing$

dan ja

anders neen

```
z ← 0
k ← 0
zolang z ∉ G en k < maxiter
    z ← z² + c
    k ← k + 1
indien z ∈ G dan antwoord ja
              anders antwoord neen
```

Indien het algoritme tot het besluit komt dat $c \notin M$, is dat gegarandeerd correct. In het andere geval zou het kunnen dat c toch niet tot M behoort, maar dit zouden we kunnen constateren door *maxiter* voldoende groter te kiezen. De rol van *maxiter* is dezelfde als bij algoritme 2: indien men bij een bepaalde keuze van P_c en G *maxiter* opvoert, zal algoritme 4 voor minder en minder punten $z_o \notin M$ tot een foutief besluit komen, maar het zal voor punten $z_o \in M$ meer werk vergen om tot dit besluit te komen. Wat het gebied G betreft, blijft het zo dat hoe groter het is, des te beter het algoritme presteert, maar het kan niet aanzien worden als een benadering voor M^c. Het moet uiteraard wel in M^c gelegen zijn om aan de eerst gestelde voorwaarde te kunnen voldoen, maar kan er nooit mee samenvallen, omdat het mogelijk is dat de orbitaal van $z = 0$ onder P_c begrensd is en toch buiten M treedt (ondermeer voor $c = j$).

Een mogelijke keuze voor G is $\operatorname{ext}(C_R)$ met $R \geqslant 2$. Zulk gebied omvat uiteraard een omgeving van ∞ en voldoet ook aan de eerst gestelde voorwaarde, want met zo een gebied G geldt

- indien $|c| \leqslant 2$, voor elke $z \in G$ dat
$$|P_c(z)| = |z^2 + c| \geqslant |z|^2 - |c| > |z|^2 - |z| > |z|, \tag{4}$$
zodat de orbitaal van z monotoon naar ∞ convergeert, en
- indien $|c| > 2$, dat
$$|P_c^{\circ 2}(0)| = |c^2 + c| \geqslant |c|^2 - |c| > |c| = |P^{\circ 1}(0)|$$
en (4) voor alle volgende punten z van de orbitaal van de oorsprong onder P_c, zodat die orbitaal monotoon convergeert naar ∞.

Analoog als bij de berekening van Julia-verzamelingen, kan de kleinste orde $k^*(c)$ van een iteratie van P_c die het punt $z = 0$ in het gebied G brengt, gebruikt worden om met elk punt van het complexe vlak een kleur te associëren. De waarde van $k^*(c)$ wordt impliciet berekend in algoritme 4 en wordt geëxpliciteerd in de volgende variante.

Algoritme 5: $c \in M$?

invoer: $c \in \mathbb{C}$
$G \subset \mathbb{C}$ zodat $\{P_c^{\circ k}(0)\}_{k=0}^{\infty} \cap G \neq \varnothing \;\Rightarrow\; 0 \in A_{P_c}(\infty)$
en $N(\infty) \subset G$
$maxiter \in \mathbb{N}$
uitvoer: indien $\{P_c^{\circ k}(0)\}_{k=0}^{maxiter} \cap G \neq \varnothing$
dan $k^* \triangleq \min\{0 \leqslant k \leqslant maxiter \,|\, P_c^{\circ k}(0) \in G\}$
anders neen

$z \leftarrow 0$
$k \leftarrow 0$
zolang $z \notin G$ en $k < maxiter$
  $z \leftarrow z^2 + c$
  $k \leftarrow k + 1$
indien $z \in G$ dan antwoord k
  anders antwoord neen

Indien men $G = \mathrm{ext}(C_R)$ kiest, blijkt deze kleuring bovendien weerom een fysische betekenis te hebben, in de zin dat de contouren van de verschillende kleurgebieden convergeren naar equipotentiaallijnen van de logaritmische evenwichtsverdeling op M, indien $R \to \infty$.

Dit procédé wordt in Fractint gebruikt om kleurenbeelden van de Mandelbrot-verzameling te genereren. Om redenen van efficiëntie kiest men daar $G = \mathrm{ext}(C_2)$ als standaard. Om de berekeningen te versnellen worden dezelfde technieken als bij het genereren van Julia-verzamelingen gebruikt.

3 Logistieke afbeeldingen

De logistieke afbeeldingen worden in een andere bijdrage behandeld. Wij zullen tot slot van deze bijdrage bij wijze van illustratie aangeven hoe het fenomeen van de periodeverdubbeling zich voor deze familie van transformaties manifesteert in de overeenkomstige Julia-verzamelingen en in de Mandelbrot-verzameling. Eerst zullen we in het kort de definitie van een logistieke afbeelding en haar eigenschappen die in verband staan met de periodeverdubbeling, hernemen, waarbij we de klemtoon zullen leggen op het mechanisme van de periodeverdubbeling. Voor een diepgaandere behandeling van deze aspecten verwijzen we naar voorgenoemde bijdrage.

3.1 Definitie

Een logistieke afbeelding is een transformatie van de reële as die beschreven wordt door de vergelijking $P_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, waarin $\lambda \in \mathbb{R}$ een parameter is. De grafiek ervan is een parabool met nulpunten $x = 0$ en $x = 1$ en topwaarde $\frac{\lambda}{4}$ in $x = \frac{1}{2}$. De waarde van de parameter λ is ook terug te vinden als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in $x = 0$.

Indien $\lambda \in [0, 4]$, wordt het interval $[0, 1]$ in zichzelf afgebeeld onder P_λ en in dat geval beschrijft een logistieke afbeelding een eenvoudig model uit de populatie-dynamica waarin de veranderlijke x de relatieve populatie-grootte (i.e. de verhouding van de populatie-grootte tot een bepaalde maximale populatie-grootte) in een zeker jaar voorstelt en $P_\lambda(x)$ die van het volgende jaar. De orbitaal van een punt x_o onder P_λ geeft dus de evolutie van de relatieve populatiegrootte weer in de loop der jaren met een begingrootte x_o. De parameter λ heeft de betekenis van een groeifactor.

Belangrijke eigenschappen van een logistieke afbeelding P_λ met $\lambda \in [0,4]$ zijn, naast het feit dat het interval $[0,1]$ in zichzelf wordt afgebeeld, dat P_λ hoogstens één attractieve of superattractieve cyclus kan hebben, en de periodeverdubbeling van de attractieve cycli bij toename van de parameter λ. De eerste eigenschap volgt uit het feit dat het aantrekkingsgebied van elke attractieve of superattractieve cyclus steeds het enige eindige kritische punt van P_λ, namelijk $x = \frac{1}{2}$, moet bevatten. Op het mechanisme van de periodeverdubbeling gaan we nu nader in.

Indien $\lambda \in [0,1]$ sterft de populatie uit: het vaste punt $x = 0$ is superattractief ($\lambda = 0$), attractief ($\lambda \in (0,1)$) of indifferent ($\lambda = 1$). In dit laatste geval sterft de populatie zeer traag uit: alle punten van $[0,1]$ convergeren weliswaar naar $x = 0$, maar omwille van het indifferente karakter van dat vaste punt slechts zeer langzaam.
Voor $\lambda \in (1,3]$ blijkt de populatie-grootte voor om het even welke aanvangsgrootte $x_o \in (0,1)$ naar een positieve evenwichtsgrootte te evolueren die overeenkomt met het vaste punt $\tilde{x}(\lambda)$ dat P_λ heeft in $(0,1)$. De eigenwaarde ervan daalt monotoon van 1 voor $\lambda = 1$ naar -1 voor $\lambda = 3$, zodat het vaste punt attractief of superattractief is voor $\lambda \in (1,3)$ en indifferent wordt voor $\lambda = 3$.
Indien men de waarde van λ nog verder laat toenemen, treedt de periodeverdubbeling op: het vaste punt wordt repulsief en in de plaats komt er een attractieve cyclus van periode 2. De situatie is voorgesteld in figuur 3. Bovenaan is het vast-puntdiagramma van P_λ en $P_\lambda^{\circ 2}$ weergegeven voor $\lambda = 3$. De eigenwaarde van het vaste punt $\tilde{x}(\lambda)$ bedraagt -1. Het locale verloop van $P_\lambda^{\circ 2}(x) - x$ in een omgeving van $x = \tilde{x}(\lambda)$ is voor $\lambda = 3$ dat van een derde macht in $(x - \tilde{x}(\lambda))$ met een negatieve coëfficiënt. Immers, $\tilde{x}(\lambda)$ is als vast punt van P_λ uiteraard ook een vast punt van $P_\lambda^{\circ 2}$ en uit het feit dat $P_\lambda(\tilde{x}(\lambda)) = \tilde{x}(\lambda)$ en $P'_\lambda(\tilde{x}(\lambda)) = -1$ volgt dat $(P_\lambda^{\circ 2})'(\tilde{x}(\lambda)) = 1$ en $(P_\lambda^{\circ 2})''(\tilde{x}(\lambda)) = 0$, zoals blijkt uit de formules

$$\begin{aligned}(P_\lambda^{\circ 2})'(x) &= P'_\lambda(P_\lambda(x)) \cdot P'_\lambda(x)\\ (P_\lambda^{\circ 2})''(x) &= P''_\lambda(P_\lambda(x)) \cdot (P'_\lambda(x))^2 + P'_\lambda(P_\lambda(x)) \cdot P''_\lambda(x).\end{aligned}$$

De derde afgeleide van $P_\lambda^{\circ 2}$ in $x = \tilde{x}(\lambda)$ hangt af van het verloop van P en blijkt gelijk te zijn aan twee keer de zogenaamde afgeleide van Schwarz in dat punt, die voor kwadratische veeltermen P strikt negatief is. De machtreeksontwikkeling van $P_\lambda^{\circ 2}(x) - x$ rondom $x = \tilde{x}(\lambda)$ begint voor $\lambda = 3$ dus met een derdemachtsterm met negatieve coëfficiënt. Het resulterende locale verloop van $P_\lambda^{\circ 2}(x) - x$ in een omgeving van $x = \tilde{x}(\lambda)$ heeft als gevolg dat als de parameter λ verder opgevoerd wordt en de eigenwaarde van het vaste punt $\tilde{x}(\lambda)$ onder -1 daalt, zodat de raaklijn aan $P_\lambda^{\circ 2}$ in $x = \tilde{x}(\lambda)$ een richtingscoëfficiënt groter dan 1 krijgt, er twee nieuwe snijpunten $\tilde{x}_1(\lambda)$ en $\tilde{x}_2(\lambda)$ van $P_\lambda^{\circ 2}$ met de bissectrice van het eerste kwadrant ontstaan, waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan $P_\lambda^{\circ 2}$ net iets kleiner dan 1 is. Deze punten behoren tot een attractieve cyclus van P_λ van periode 2. De situatie is voor $\lambda = 3.25$ voorgesteld op de onderzijde van figuur 3.
Indien de waarde van λ nog verder wordt opgevoerd, daalt de eigenwaarde van deze cyclus van periode 2, bereikt de waarde -1 en wordt dan repulsief. Bij die overgang doet zich bij elk van de punten van de cyclus hetzelfde fenomeen voor als hoger: omwille van het locale derdemachtsverloop met negatieve coëfficiënt[2] van $P_\lambda^{\circ 4}$ in de omgeving van deze punten, ontstaan er uit elk van deze punten twee nieuwe vaste punten van $P_\lambda^{\circ 4}$ die alle samen een attractieve cyclus van periode 4

[2]De iteraties van een transformatie van de reële as met een negatieve afgeleide van Schwarz hebben ook een negatieve afgeleide van Schwarz.

Figure 3: Vast-puntdiagramma's voor de iteraties van eerste en tweede orde van de logistieke afbeeldingen P_λ met $\lambda = 3$ (bovenaan) en $\lambda = 3.25$ (onderaan).

vormen.
Dit procédé blijft zich herhalen in een steeds sneller tempo (cfr. constante van Feigenbaum), totdat uiteindelijk voor de waarde $\lambda_\infty \simeq 3.570$ de logistieke afbeelding een aperiodiek gedrag verkrijgt. Bij nog hogere waarden van λ worden andere cycli stabiel, waarvan de periode dan ook verdubbelt volgens het besproken stramien als men λ laat toenemen.
In het onderste deel van figuur 4, het bifurcatie-diagramma voor de familie van logistieke afbeeldingen P_λ met $\lambda \in [1,4]$, wordt dit alles geïllustreerd. Ze werd gegenereerd door voor de beschouwde waarden van de parameter λ, het 1000ste tot het 1100ste punt van de orbitaal van het punt $x = \frac{1}{2}$ uit te zetten in functie van λ. Omdat we weten dat het punt $x = \frac{1}{2}$ tot het aantrekkingsgebied van de attractieve cyclus van P_λ moet behoren zo die bestaat, worden op die manier eigenlijk de punten van die attractieve cyclus weergegeven in functie van λ, op voorwaarde dat de convergentie binnen de 1000 stappen is opgetreden en de periode van de cyclus niet groter is dan 100. De eerste bifurcaties zijn zeer goed zichtbaar. Rond $\lambda \simeq 3.83$ blijkt periode drie stabiel te zijn. Ook hier zijn de eerstvolgende bifurcaties goed zichtbaar. De lezer kan dit diagramma ook zelf genereren met behulp van Fractint (menu 'biflambda'). Merk wel op dat de λ-as in figuur 4 niet lineair is.

We willen er de nadruk op leggen dat de eigenschap van maximaal één attractieve cyclus te hebben en de periodeverdubbelingseigenschap niet karakteristiek is voor de familie van de logistieke afbeeldingen. Ze worden gedeeld door een grote klasse van families van unimodale transformaties van de reële as die een compact interval in zichzelf afbeelden en een negatieve afgeleide van Schwarz hebben op dat interval.

3.2 Periodeverdubbeling en Julia-verzamelingen en de Mandelbrot-verzameling

We zullen nu zien hoe de eigenschap van de periodeverdubbeling zich laat gevoelen in de vormverandering van de Julia-verzameling en in de Mandelbrot-verzameling als we de parameter λ laten toenemen van 2 tot $\lambda_\infty \simeq 3.570$. Daartoe moeten we in eerste instantie het domein van de logistieke afbeelding

$$P_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \, x \to \lambda x(1-x)$$

uitbreiden van de reële as $\mathbb{R}$ naar het complexe vlak $\mathbb{C}$. Onder de eis van analyticiteit kan dit op slechts één manier, namelijk de voor de hand liggende uitbreiding

$$P_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \, z \to \lambda z(1-z).$$

Aangezien het om een uitbreiding gaat, blijft de eigenschap dat het interval $[0,1]$ in zichzelf afgebeeld wordt, uiteraard behouden. Het blijft ook zo dat het aantrekkingsgebied van elke attractieve of superattractieve cyclus het enige eindige kritische punt moet bevatten[3], zodat er hoogstens één zulke cyclus kan zijn voor een bepaalde waarde van de parameter λ. De eigenschap van de periodeverdubbeling blijft niet helemaal behouden: we zullen zien dat de periode ook met een grotere factor dan twee kan toenemen.

Om het verband te kunnen leggen met de Mandelbrot-verzameling, waarbij veeltermen van de vorm $P_c(z) = z^2 + c$ een rol spelen, moeten we weten hoe het dynamisch gedrag van veeltermen van die familie gerelateerd is aan dat van veeltermen uit de familie van de logistieke afbeeldingen. De relatie kan gelegd worden via zogenaamde lineaire conjugatie, wat we nu eerst zullen behandelen.

[3]De voorwaarde van een negatieve afgeleide van Schwarz te hebben, speelt in de complexe context geen rol meer en zou er overigens geen betekenis hebben.

3.2.1 Lineaire conjugatie

Volgende eigenschap stelt hoe P_λ geconjugeerd is met P_c via een lineaire transformatie L. Ze is zeer eenvoudig te verifiëren.

Eigenschap 4 *Weze* $P_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \lambda z(1-z)$ *met* $\lambda \in \mathbb{C}$, *dan geldt dat*

$$P_\lambda = L^{-1} \circ P_c \circ L,$$

waarbij

$$\begin{aligned} P_c &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to z^2 + c, \\ L &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \alpha z + \beta \end{aligned}$$

en $\alpha = -\lambda$, $\beta = \frac{\lambda}{2}$ *en* $4c = -\lambda^2 + 2\lambda$.

Dit betekent dat het effect van P_λ ook kan bekomen worden door eerst de lineaire transformatie L toe te passen (dit is een rotatie over een hoek $\arg(\alpha)$ rond de oorprong, een homothetie met factor $|\alpha|$ en centrum in de oorsprong en een translatie over β), vervolgens P_c en ten slotte de lineaire transformatie die de inverse is van L. Hetzelfde geldt voor de iteraties van P_λ: voor elke $k \in \mathbb{N}$ is het zo dat $P_\lambda^{\circ k} = L^{-1} \circ P_c^{\circ k} \circ L$. Dit alles betekent dat het dynamisch gedrag van P_λ hetzelfde is als dat van P_c met $4c = -\lambda^2 + 2\lambda$. Voor wat de Julia-verzamelingen betreft, betekent dit dat $J(P_c) = L(J(P_\lambda))$ of anders gesteld, dat $J(P_\lambda) = L^{-1}(J(P_c))$. Indien λ reëel is, wordt het interval $[0,1]$ onder L in het interval $[-\frac{|\lambda|}{2}, \frac{|\lambda|}{2}]$ op de reële as getransformeerd. Als λ positief is, wordt daarbij de oriëntatie van het interval omgekeerd.

3.2.2 Periodeverdubbeling en Julia-verzamelingen

We zullen nu beschrijven hoe de Julia-verzameling van P_λ varieert indien we de parameter λ laten toenemen van 2 tot λ_∞. Volgens eigenschap 4 komt dit overeen met het laten afnemen van de parameter c van 0 tot $c_\infty \simeq -1.401$. De lezer kan op basis hiervan met Fractint de beschrijving volgen.

Vooreerst weze opgemerkt dat alle punten van de reële as buiten het interval $[0,1]$ naar het punt $-\infty$ op die as convergeren onder de iteraties van P_λ. Aangezien bovendien $[0,1]$ door P_λ in zichzelf wordt afgebeeld, betekent dit dat de doorsnede van de opgevulde Julia-verzameling $K(P_\lambda)$ met de reële as het interval $[0,1]$ is voor alle beschouwde waarden van λ.

Voor $\lambda = 2$ is $J(P_\lambda)$ de cirkel met middelpunt $z = \frac{1}{2}$ en straal $\frac{1}{2}$. Dit volgt door lineaire conjugatie uit het feit dat de Julia-verzameling van de veelterm z^2 de eenheidscirkel is. De intersectie van $J(P_\lambda)$ met de reële as bevat dus juist de punten $z = 0$ en $z = 1$. Laten we λ verder toenemen, wordt deze cirkel vervormd, maar blijft nog steeds een Jordan-kromme met de punten $z = 0$ en $z = 1$ als snijpunten met de reële as, zolang $\lambda < 3$. Alle punten uit het inwendige van deze Jordan-kromme convergeren naar het unieke attractieve vaste punt $\tilde{x}(\lambda)$ van P_λ en de punten erbuiten naar ∞.

Van zodra λ boven de waarde 3 stijgt, wordt $\tilde{x}(\lambda)$ repulsief en behoort dan volgens definitie 3 tot de Julia-verzameling. Anderzijds is het zo dat uit $\tilde{x}(\lambda)$ zich twee punten afscheiden, één langs links op de reële as en één langs rechts, die een attractieve cyclus van periode twee vormen en waarnaar alle punten tussen beide in convergeren, behalve het punt $\tilde{x}(\lambda)$. Dit betekent dat in een voldoend klein interval rondom $\tilde{x}(\lambda)$ op de reële as, het enige punt dat tot de Julia-verzameling behoort, het

punt $\tilde{x}(\lambda)$ is, daar waar voor $\lambda < 3$ er geen enkel punt van zulk interval tot de Julia-verzameling behoorde. De overgang gebeurt door insnoering van de Julia-verzameling ter hoogte van het vaste punt $\tilde{x}(\lambda)$. Juist als λ de waarde 3 bereikt, raken de tentakels die naar de reële as toe groeien, elkaar in $\tilde{x}(\lambda)$. Bovendien gebeurt deze insnoering niet alleen ter hoogte van $\tilde{x}(\lambda)$. $J(P_\lambda))$ is immers invariant onder P_λ^{-1}, wat impliceert dat de insnoering zich ook voltrekt ter hoogte van de punten van de reële as die onder een iteratie van P_λ op $\tilde{x}(\lambda)$ afgebeeld worden.
Als men λ verder laat toenemen, herhaalt zich dit procédé voor de waarden van λ waarbij een cyclus van een bepaalde periode repulsief wordt en eruit een attractieve cyclus met dubbele periode ontstaat. De Julia-verzameling wordt ingesnoerd ter hoogte van de punten van de repulsief geworden cyclus en hun voorgangers onder P_λ, juist op het moment dat er uit elk van die punten twee nieuwe punten ontstaan die alle samen de attractieve cyclus van de dubbele periode vormen.

3.2.3 Periodeverdubbeling en de Mandelbrot-verzameling

Zoals reeds gezegd komt het laten toenemen van de parameter λ van 2 tot λ_∞ voor de familie veeltermen van de vorm $P_\lambda(z) \triangleq \lambda z(1-z)$ overeen met het laten afnemen van de parameter c van 0 tot $c_\infty \simeq -1.401$ voor de familie veeltermen van de vorm $P_c(z) \triangleq z^2 + c$. Dit betekent dat we bovenaan op de figuur 4 van de Mandelbrot-verzameling het pad volgen bestaande uit het interval $[c_\infty, 0]$ op de reële as van rechts naar links. De periodeverdubbelingen zijn ook hierop duidelijk merkbaar.

Waarden van de parameter c waarvoor P_c een attractieve of superattractieve cyclus heeft, zijn steeds in het inwendige van de Mandelbrot-verzameling M gelegen. Men vermoedt dat het omgekeerde ook geldt, namelijk dat het inwendige van M enkel punten c bevat waarvoor P_c een attractieve of superattractieve cyclus heeft. Aangezien P_c op het moment van een periodeverdubbeling zo geen cyclus heeft, maar slechts een indifferente, impliceert dit dat c dan op de rand van M ligt. In de veronderstelling dat het hogervermelde vermoeden waar is, weet men bovendien dat in elke component van het inwendige van M een attractieve cyclus van een bepaalde periode attractief of superattractief is, zodat c op de gemeenschappelijke rand van twee componenten moet gelegen zijn. Bij een periodeverdubbeling gaat de parameter c dus over van één component naar de volgende die er links van gelegen is.

Dit is goed te zien op figuur 4. Het bovenste deel van deze figuur geeft de rand van de Mandelbrot-verzameling weer. Het onderste deel is het bifurcatie-diagramma voor de familie van de logistieke afbeeldingen P_λ met $\lambda \in [1, 4]$, waarbij de λ-as zodanig is gegradeerd, dat het punt c op de reële as van het bovenste deel van de figuur en juist boven het punt λ op de λ-as, voldoet aan de betrekking $4c = -\lambda^2 + 2\lambda$, wat volgens eigenschap 4 betekent dat de overeenkomstige veeltermen P_c en P_λ geconjugeerd zijn.
Zo bijvoorbeeld heeft P_c voor waarden van c gelegen in de grootste component van het inwendige van M, die het inwendige van een cardioïde vormt, steeds een attractief of superattractief vast punt. De component onmiddellijk links ervan, het inwendige van de cirkel met middelpunt $z = -1$ en straal 0.25, bevat enkel c-waarden waarvoor P_c een attractieve of superattractieve cyclus van periode 2 heeft. De eerste periodeverdubbeling doet zich juist op de gemeenschappelijke rand van deze twee componenten voor, namelijk voor $c = -0.75$, of nog voor $\lambda = 3$, zoals uit het bifurcatie-diagramma af te lezen valt. De lezer kan dit verder verifiëren voor de volgende bifurcaties.
We merken ook op dat het stuk op het bifurcatie-diagramma van figuur 4 rond $\lambda \simeq 3.83$, waarin duidelijk een cyclus van periode 3 attractief is, overeenkomt met de cardioïde van de secundaire

Figure 4: Rand van de Mandelbrot-verzameling voor de familie $P_c(z) = z^2 + c$ (bovenaan) en bifurcatie-diagramma voor de familie $P_\lambda(z) = \lambda z(1-z)$ met geconjugeerde λ-as voor $\lambda \in [1,4]$ (onderaan).

Mandelbrot-verzameling rond $c \simeq -1.76$.

Tot slot willen we erop wijzen dat deze periodeverdubbelingen typisch zijn voor de reële as. Zo wordt de periode van de attractieve cyclus bij overgang van de centrale cardioïde in figuur 4 naar de grootste component erboven, niet met 2 vermenigvuldigd, maar met 3. In het algemeen is het zo dat men door over te stappen van één bepaalde component naar een aanliggende, de periode van de attractieve cyclus met elk positief geheel getal kan vermenigvuldigen.