ТЕОРИЯ 2-РЕГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЛИПШИЦЕВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов

До сих пор 2-регулярность использовалась для описания локальной структуры дважды дифференцируемого нелинейного отображения вблизи его особой (анормальной) точки. Здесь эта теория распространяется на случай один раз дифференцируемого отображения, производная которого непрерывна по Липшицу. Полученные результаты применяются, в частности, для вывода условий оптимальности, применимых к оптимизационным задачам с ограничениями-равенствами соответствующей гладкости. Обсуждаются приложения к комплементарным задачам и оптимизационным задачам с комплементарными ограничениями, которые и являются основной мотивировкой настоящего исследования.

1. Введение и мотивировка

Хорошо известно, что недостаток регулярности приводит к многочисленным трудностям при теоретическом исследовании и численном решении нелинейных задач. Например, стандартные необходимые условия оптимальности становятся тривиальными при нарушении соответствующего условия регулярности ограничений, а стан-

дартные численные методы неприменимы, либо неэффективны вблизи нерегулярных решений нелинейных операторных уравнений, задач оптимизации и т.п.

Концепция 2-регулярности, первоначально введенная в этом контексте в начале 80-х (см. [1, 2]), оказалась весьма полезным средством в различных вопросах, связанных с особыми точками нелинейных отображений (т.е. точками, в которых производная отображения не сюръективна), в таких областях, как нелинейный анализ, теория оптимизации и численное решение нелинейных задач с особыми решениями [3, 4]. Основная идея этого подхода состоит в умном использовании информации о второй производной Фреше в случаях, когда первой производной не достаточно для адекватного описания локальной структуры нелинейного отображения.

Настоящая статья содержит обзор недавних результатов авторов по развитию концепции 2-регулярности и связанной с ней теории для случая, когда рассматриваемое отображение не предполагается *дважды* дифференцируемым по Фреше. Начнем с некоторых примеров, мотивирующих такие построения.

Рассмотрим *нелинейную комплементарную задачу* (НКЗ) [5, 6, 7]. При заданном достаточно гладком отображении $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, эта задача состоит в отыскании точки $x \in \mathbf{R}^m$ такой, что

$$g(x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \langle g(x), x \rangle = 0. \tag{1}$$

Хотя существует целый ряд подходов к решению НКЗ, один из наиболее успешных и широко используемых основан на эквивалентной переформулировке НКЗ как системы уравнений [8, 9, 10]. Наиболее очевидной (что нис-

колько не снижает ее полезности) является переформулировка в терминах так называемой *естественной невязки*

$$F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m, \quad F_i(x) = \min\{x_i,\, g_i(x)\}, \quad i = 1,\, \ldots,\, m, \tag{2}$$

но основная трудность с соответствующей переформулировкой

$$F(x) = 0 \tag{3}$$

состоит в том, что F, вообще говоря, негладко. Известен также ряд гладких переформулировок, например, можно взять

$$F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m, \quad F_i(x) = 2g_i(x)x_i - \\ - (\min\{0,\, g_i(x) + x_i\})^2, \quad i = 1,\, \ldots,\, m \tag{4}$$

[9, 11]. Это отображение дифференцируемо и имеет липшиц-непрерывную производную, но при этом, оно известно своей нерегулярностью. Действительно, пусть $\bar{x} \in \mathbf{R}^m$ — решение НКЗ (1) или, что равносильно, уравнения (3) с оператором F введенном в (4). Легко проверить, что

$$F_i'(\bar{x}) = 2 \begin{cases} 0, & \text{если } i \in I_0, \\ \bar{x}_i g_i'(\bar{x}), & \text{если } i \in I_1, \\ g_i(\bar{x})e^i, & \text{если } i \in I_2, \end{cases}$$

где множества индексов I_0, I_1 и I_2 определены следующим образом:

$$I_0 := \{i = 1,\, \ldots,\, m \mid g_i(\bar{x}) = 0,\, \bar{x}_i = 0\},$$

$$I_1 := \{i = 1,\, \ldots,\, m \mid g_i(\bar{x}) = 0,\, \bar{x}_i > 0\},$$

$$I_2 := \{i = 1,\, \ldots,\, m \mid g_i(\bar{x}) > 0,\, \bar{x}_i = 0\},$$

а $e^1, \ldots, e^m$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^m$. Очевидно, оператор $F'(\bar{x})$ всегда вырожден, за исключением случая, когда $I_0 = \emptyset$, но последнее условие (известное как *условие строгой комплементарности*) специалисты в НКЗ считают весьма ограничительным. С другой стороны, здесь нельзя применить непосредственно теорию 2-регулярности при $I_0 \neq \emptyset$, поскольку в этом случае F не дважды дифференцируемо в точке $\bar{x}$. Поэтому ни удовлетворительное теоретическое описание множества решений (например, в терминах оценки расстояния до этого множества), ни методы для численного отыскания решения не следуют немедленно из известных результатов для систем уранений.

Заметим, что именно при невыполнении условия строгой комплементарности естественная невязка, введенная в (2), теряет гладкость в решении $\bar{x}$. Известно также, что *любая* другая гладкая переформулировка НКЗ (задаваемая другим подходящим выбором F) имеет аналогичное свойство нерегулярности в решении [12]. Кроме того, все полезные гладкие переформулировки обладают тем общим свойством, что определяющие их отображения F не являются дважды дифференцируемыми; см. [13]. Таким образом, переформулировки НКЗ доставляют важный пример лишь один раз дифференцируемых нелинейных уравнений, решения которых неизбежно оказываются вырожденными в наиболее интересных ситуациях.

Совершенно аналогичные трудности возникают при рассмотрении систем Каруша-Куна-Таккера для задач оптимизации с ограничениями-неравенствами, если в искомом решении не выполнено классическое условие *строгой дополняющей нежесткости.* Это важнейшее прило-

жение здесь не рассматривается, оно будет обсуждаться отдельно, в других публикациях.

Теперь рассмотрим *задачу оптимизации с комплементарными ограничениями* (ЗОКО):

$$f(x) \to \min, \quad x \in D, \tag{5}$$

где допустимое множество D есть множество решений параметрической НКЗ:

$$D = \{x = (u, v) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid g(u, v) \geq 0,$$
$$v \geq 0, \langle g(u, v), v \rangle = 0\}. \tag{6}$$

Здесь $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ — заданная целевая функция, а $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — достаточно гладкое отображение. Задача (5), (6) является важным специальным случаем *задачи оптимизации с равновесными ограничениями* (ЗОРО). Такие задачи составляют отнсительно новую область активных исследований в конечномерной оптимизации (см. [14] и цитированную там литературу).

Что касается ЗОРО, основная трудность здесь снова состоит в недостатке регулярности. Хорошо известно [15], что для ЗОРО классическое *условие регулярности Мангасариана–Фромовица* (УРМФ) [16] нарушается в *каждой* допустимой точке. Более того, легко видеть, что теория условий оптимальности, основанная на 2-регулярности, или любой другой концепции регулярности, использующей производные только до некоторого конечного порядка, также непосредственно не применима в этом контексте. Причина состоит в том, ограничения такой задачи крайне неустойчивы: вблизи любой допустимой точки ограничение-равенство в определении

D можно возмутить членом любого порядка малости так, что допустимое множество возмущенной задачи будет состоять из единственной точки.

Разумеется, можно переформулировать ограничения ЗОКО как равенства, аналогично тому, как выше переформулировалась НКЗ, но, очевидно, это приведет к тем же трудностям (недостаток гладкости и недостаток регулярности, если не накладывать ограничительное условие строгой комплементарности).

Приведенные примеры, которые будут вновь рассмотрены ниже, являются основной мотивировкой развития теории 2-регулярности для отображений с липшиц-непрывной первой производной, но, возможно, не имеющих второй производно Фреше. Ниже будет показано, что эта постановка явдяется значительно более богатой, чем классический регулярный или дважды дифференцируемый 2-регулярный случаи. Оба эти случая являются частными для проводимых здесь построений, и геометрические структуры, описываемые с помощью излагаемого подхода, могут быть существенно более сложными. Например, в наших предположениях касательный конус к множеству уровня отображения не обязан содержать нетривиальных линейных подпространств, даже если сам конус нетривиален. Этот конус может состоять из лучей (а не прямых), а соответствующее множество уровня может иметь ґизломЄ, чего не бывает в регулярном и дважды дифференцируемом 2-регулярном случаях, в которых касательный конус — всегда ґдвусторонний Є, т.е. вместе с любым ненулевым элементом содержит проходящую через него и через нуль прямую.

Оговорим основные обозначения. Пусть X и Y —

банаховы пространства. Через I_X обозначается тождественный оператор в X. Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y, нормированное стандартным образом. Для линейного оператора $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ будем использовать обозначения $\ker \Lambda$ и $\operatorname{im} \Lambda$ для его ядра и обрвза соответственно. Положим

$$\|\Lambda^{-1}\| = \sup_{\substack{y \in Y, \\ \|y\|=1}} \operatorname{dist}(0, \Lambda^{-1}(y)).$$

Далее, Λ^* обозначает линейный оператор сопряженный с Λ, а X^* — подпространство (топологически) сопряженное с X. Если K конус в X, то K^* — (положительно) сопряженный с K конус. Для множества S в X через $S^\perp$ обозначается его аннулятор (то же самое обозначение будет использоваться для ортогонального дополнения линейного подпространства, когда это понятие корректно).

2. 2-регулярность

Начнем с *основных гипотез*, выполнение которых предполагается всюду ниже:

(H1) X и Y — банаховы пространства, V — окрестность точки $\bar{x}$ в X;

(H2) отображение $F : V \to Y$ дифференцируемо по Фреше на V, и отображение $F' : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно в точке $\bar{x}$;

(H3) подпространство $Y_1 = \operatorname{im} F'(\bar{x})$ замкнуто и имеет замкнутое прямое дополнение Y_2 в Y;

(H4) отображение $PF' : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ липшиц-непрерывно на V, где P — проектор на Y_2 параллельно Y_1 в Y.

Заметим, что при выполнении (H3) проектор P непрерывен, как и его дополнительный проектор $R = I_Y - P$. Заметим также, что (H3) выполняется автоматически, если Y конечномерно, или даже гильбертово (в последнем случае замкнутость Y_1 следует предполагать).

Подчеркнем, что в регулярном случае, когда

$$\operatorname{im} F'(\bar{x}) = Y, \tag{7}$$

гипотезы (H3) и (H4) выполняются тривиальным образом (поскольку в этом случае $Y_1 = Y$, $Y_2 = \{0\}$ и $P = 0$), также, как и формулируемая ниже гипотеза (H5).

Предлагаемый ниже анализ основан на обычном понятии прозводной по направлению отображения $PF'(\cdot)$ в точке $\bar{x}$. Для направления $h \in X$ эта производная обозначается через $(PF')'(\bar{x};\, h)$. Во избежание технических осложнений, будем предполагать следующее (несмотря на то, что в большинстве приводимых ниже результатов достаточно более слабых предположений о гладкости):

(H5) отображение $PF' : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ дифференцируемо в точке $\bar{x}$ по любому направлению в X.

Заметим, что $PF'(\cdot)$ может быть дифференцируемо по направлениям даже если $F'(\cdot)$ не обладает этим свойством. Для каждого $h \in X$ определим следующий линейный оператор, который будет играть центральную роль ниже:

$$\Psi_2(h) \in \mathcal{L}(X, Y), \quad \Psi_2(h) = F'(\bar{x}) + (PF')'(\bar{x};\, h).$$

Следующие определения 2-регулярности являются прямыми обобщениями соответствующих определений для дважды дифференцирумых отображений (см., например, [2, 17, 18, 19, 3, 20, 21, 4]).

Определение 1. Отображение F называется 2-*регулярным в точке* $\bar{x}$ *на элементе* $h \in X$, если $\operatorname{im} \Psi_2(h) = Y$.

Определение 2. Отображение F называется 2-*регулярным в точке* $\bar{x}$, если оно 2-регулярно в этой точке на любом элементе $h \in T_2 \setminus \{0\}$, где

$$T_2 = \{h \in \ker F'(\bar{x}) \mid (PF')'(\bar{x};\, h)h = 0\}.$$

Очевидно, введенное понятие 2-регулярности содержит классическую регулярность как частный случай. Действительно, если выполнено (7), то $\Psi_2(h) = F'(\bar{x})$, поэтому F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на любом элементе $h \in X$, и, в частности, 2-регулярно в точке $\bar{x}$.

Определение 3. Отображение F называется *сильно* 2-*регулярным в точке* $\bar{x}$, если существует число $\nu > 0$ такое, что

$$\sup_{\substack{h \in T_2^\nu, \\ \|h\|=1}} \|(\Psi_2(h))^{-1}\| < \infty,$$

где

$$T_2^\nu = \{h \in X \mid \|F'(\bar{x})h\| \le \nu,\ \|(PF')'(\bar{x};\, h)h\| \le \nu\}.$$

Очевидно, если отображение F регулярно в точке $\bar{x}$, то F сильно 2-регулярно в этой точке. Кроме того, в случае конечномерного X сильная 2-регулярность равносильна

2-регулярности. В общих банаховых пространствах сильная 2-регулярность несколько сильнее.

В последующем будет использоваться также следующее понятие дифференцируемости. Отображение $PF'(\cdot)$ называется *B-дифференцируемым в точке $\bar{x}$ относительно конуса K* в X, если

$$PF'(\bar{x}+h) = PF'(\bar{x}) +$$

$$+(PF')'(\bar{x};\, h) + o(\|h\|), \quad h \in (V - \bar{x}) \cap K.$$

Отображение $PF'(\cdot)$ называется *B-дифференцируемым в точке $\bar{x}$*, если оно B-дифференцируемо в этой точке относительно конуса $K = X$. Понятие B-дифференцируемости (относительно $K = X$) было введено в [22] (B — в честь Булигана). В конечномерном случае отображение, являющееся липшицевым в окрестности точки (напомним гипотезу (H4)), B-дифференцируемо в этой точке, если и только если оно дифференцируемо в этой точке по любому направлению [23].

3. Теорема о представлении и касательный конус

Известно, что локальную структуру дважды дифференцируемого 2-регулярного отображения можно описать с помощью его линейно-квадратичной аппроксимиции [21]. Ниже приводится обобщение этого факта. При этом потребуется следующее предположение: для некотрого конуса K в X

$$\sup_{\substack{h \in K, \\ \|h\|=1}} \|(\Psi_2(h))^{-1}\| < \infty. \tag{8}$$

Если F регулярно в точке $\bar{x}$, то (8) выполнено при $K = X$. Кроме того, если F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на любом элементе $h \in K \setminus \{0\}$ и X конечномерно, то (8) тоже выполнено.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены основные гипотезы* (H1)–(H5). *Предположим далее, что отображение $PF'(\cdot)$ B-дифференцируемо в точке $\bar{x}$ относительно конуса K в X, и выполнено* (8).

Тогда найдутся окрестность U точки 0 в X и отображение $\varphi : U \to X$ такие, что $\varphi(U) \subset V$, φ дифференцируемо по Фреше в точке 0, *и*

(a) $F(\varphi(x)) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})x + \frac{1}{2}(PF')'(\bar{x};\, x)x \quad \forall\, x \in U \cap K$;

(b) $\varphi(0) = \bar{x}$, $\varphi'(0) = I_X$.

В регулярном случае Теорема 1 превращается в следующий результат о линеаризации: (a) принимает вид

$$F(\varphi(x)) = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})x \quad \forall\, x \in U.$$

Видимо, наиболее важным следствием теоремы о представлении является описание касательного конуса к множеству уровня 2-регулярного отображения. Для произвольного множества $D \subset X$ обозначим обычный (метрический) *касательный конус* к D в точке $\bar{x} \in D$ через $T_D(\bar{x})$, а *контингентный конус* (*конус Булигана*) — через $B_D(\bar{x})$:

$$T_D(\bar{x}) = \{h \in X \mid \operatorname{dist}(\bar{x} + th,\, D) = o(t),\, t \in \mathbf{R}_+\},$$

$$B_D(\bar{x}) = \{h \in X \mid \exists\, \{x^k\} \subset D,\, \exists\, \{\lambda_k\} \subset \mathbf{R}_+ :$$
$$\{x^k\} \to \bar{x},\, \{\lambda_k(x^k - \bar{x})\} \to h\}.$$

Теорема 2. *Предположим, что выполнены основные гипотезы* (H1)–(H5), *и* $h \in X$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

(a) *если* $h \in B_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x})$, *то* $h \in T_2$;

(b) *если* $h \in T_2$, *и отображение* F 2-*регулярно в точке* $\bar{x}$ *на элементе* h, *то* $h \in T_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x})$.

В частности, если отображение F 2-*регулярно в точке* $\bar{x}$, *то*

$$T_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = B_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = T_2.$$

Важно отметить, что в действительности последнее утверждение теоремы справедливо и при несколько более слабых условиях, чем 2-регулярность F в точке $\bar{x}$. А именно, достаточно предполагать, что F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на любом элементе некоторого плотного подмножества T_2. Это следует из замкнутости касательного конуса (к любому множеству в любой точке; см. [24]).

В регулярном случае, когда выполнено (7), имеем: $T_2 = \ker F'(\bar{x})$, и поэтому Теорема 2 становится классической теоремой Люстерника о касательном подпространстве, согласно которой

$$T_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = B_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = \ker F'(\bar{x})$$

[24]. В предположении о двукратной дифференцируемости F по Фреше в точке $\bar{x}$ Теорема 2 была доказана в [1] (для случая $F'(\bar{x}) = 0$) и в [2] (в полной общности), и эти публикации могут рассматриваться как отправная точка теории 2-регулярности. Однако, весьма близкие разультаты появлялись в более ранней литературе [25, 26, 27], в контексте теории бифуркаций.

Следующий пример (очевидным образом связанный с обсуждавшимися выше переформулировками комплементарных задач) показывает, что структура множества уровня, описываемая Теоремой 2, может быть значительно более общей, чем в случае регулярности, или 2-регулярности и двукратной дифференцируемости F в точке $\bar{x}$.

Пример 1. Рассмотрим отображение

$$F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad F(x) = 2x_1x_2 - (\min\{0,\, x_1 + x_2\})^2 + \omega(x),$$

в точке $\bar{x} = 0$, где $\omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ — такая функция, что $\omega(x) = o(\|x - \bar{x}\|^2)$. Легко видеть, что основные гипотезы выполнены. Заметим, что $F'(\bar{x}) = 0$, и поэтому F не регулярно в точке $\bar{x}$. Поскольку F не является дважды дифференцируемым в точке $\bar{x}$, стандартная теория 2-регулярности также не применима, но прямыми вычислениями можно показать, что F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на любом элементе $h \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ (в частности, F 2-регулярно в точке $\bar{x}$) в смысле настоящей работы, и следовательно

$$T_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = B_{F^{-1}(F(\bar{x}))}(\bar{x}) = T_2 =$$
$$= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0,\, x_1x_2 = 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \min\{x_1,\, x_2\} = 0\}.$$

Заметим, что касательный конус состоит из двух лучей и имеет ґизломЄ, чего не может быть в регулярном случае, или в дважды дифференцируемом 2-регулярном случае.

Теорема 2 — важный инструмент для получения условий оптимальности в 2-регулярных задачах условной оптимизации; эти вопросы обсуждаются ниже.

4. Оценки расстояния до множества уровня

Среди наиболее важных средств для теоретического исследования и численного решения нелинейных операторных уравнений, задач оптимизации, вариационных неравенств и других задач, особое место занимают оценки расстояния до множества решений, либо допустимого множества. Более строгим образом, речь идет об оценках сверху расстояния до заданного множества черех некоторую функцию невязки. Если множество задается функциональными ограничениями, то типичной функцией невязки является некоторая мера нарушения ограничений в заданной точке. Когда они имеются, оценки расстояния могут использоваться для конструктивного локального описания рассматриваемого множества. Такое описание, в свою очередь, играет центральную роль в теории условий оптимальности. В качестве другого важного приложения оценок расстояния упомянем построение, реализацию и анализ скорости сходимости численных методов решения оптимизационных и других задач. Здесьь рассматриваются оценки расстояния до множества, заданного ограничениями-равенствами.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены основные гипотезы* (H1)–(H5). *Предположим далее, что* F *сильно* 2*-регулярно в точке* $\bar{x}$.

Тогда найдутся окрестность $U \subset V$ *точки* $\bar{x}$ *в* X *и число* $M > 0$ *такие, что*

$$\operatorname{dist}(x,\, F^{-1}(F(\bar{x}))) \le M(\|R(F(x) - F(\bar{x}))\| + \\ + \|P(F(x) - F(\bar{x}))\|^{1/2}) \quad \forall\, x \in U. \tag{9}$$

Заметим, что в регулярном случае Теорема 3 дает классическую линейную оценку расстояния [24]. А именно, оценка (9) принимает вид

$$\operatorname{dist}(x,\, F^{-1}(F(\bar{x}))) \leq M\|F(x) - F(\bar{x})\| \quad \forall\, x \in U.$$

Для случая дважды дифференцируемого отображения F, Теорема 3 была получена в [18].

Ясно, что оценку (9) можно упростить следующим образом:

$$\operatorname{dist}(x,\, F^{-1}(F(\bar{x}))) \leq M\|F(x) - F(\bar{x})\|^{1/2} \quad \forall\, x \in U$$

(такое упрощение бывает удобным, поскольку в нем не фигурируют проекторы). Однако, последняя оценка слабее, чем (9).

5. Новая оценка расстояния для нелинейной комплементарной задачи

В этом разделе, в качестве приложения общего результата об оценке расстояния, предлагается новая оценка расстояния для НКЗ (1). Насколько известно авторам, наиболее слабым условием, при котором такая оценка была известно до сих пор, является так называемая *b-регулярность*, введенная в [28]. Здесь сформулируем это условие в следующей форме: для любой пары $(A,\, B)$ множеств индексов таких, что $A \cup B = I_0$, $A \cap B = \emptyset$, и для произвольного $h \in \mathbf{R}^m$

$$\left.\begin{array}{l} \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle = 0,\ i \in A \\ h_i = 0,\ i \in B \\ \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle = 0,\ i \in I_1 \\ h_i = 0,\ i \in I_2 \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad h = 0. \qquad (10)$$

Если $\bar{x}$ является b-регулярным решением НКЗ, то справедлива линейная оценка расстояния в терминах естественной невязки, введенной в (2).

Применение Теоремы 3 к переформулировке (3) НКЗ (1), использующей отображение F определенное в (4), приводит к оценке расстояния в более слабых предположениях, чем b-регулярность.

Будем предполагать, что g является достаточно гладким в некоторой окрестности решения $\bar{x}$ задачи (1) в $\mathbf{R}^m$. Тогда легко видеть, что F, заданное в (4), удовлетворяет вссем условиям гладкости Теоремы 3. Следовательно, оценка расстояния для НКЗ в терминах функции невязки $\|F(\cdot)\|$ следует немедленно из Теоремы 3, если только F 2-регулярно в точке $\bar{x}$. Несложно убедиться, что в этом контексте последнее условие выполняется, если и только если

$$T_2 = \{0\}. \tag{11}$$

Заметим, что если выполнено последнее условие, то $\bar{x}$ является изолированным решением задачи (1). Применяя теперь Теорему 3, немедленно получаем следующую оценку равсстояния: найдутся окрестность U точки $\bar{x}$ в $\mathbf{R}^m$ и число $M > 0$ такие, что

$$\|x - \bar{x}\| \le M(\|RF(x)\| + \|PF(x)\|^{1/2}) \le$$

$$\le M\|F(x)\|^{1/2} \quad \forall\, x \in U. \tag{12}$$

Обратимся к более ясной интерпретации условия (11). Для простоты (а также чтобы упростить сравнение с b-грегулярностью) будем предполагать, что

$$g_i'(\bar{x}),\ i \in I_1,\ e^i,\ i \in I_2,\ \text{линейно независимы в } \mathbf{R}^m. \tag{13}$$

Заметим, что это условие не является необходимым для того, чтобы переформулировка НКЗ удовлетворяла (11). С другой стороны, это условие существенно упрощает последующие вычисления. Заметим также, что b-регулярность подразумевает выполнение (13).

При выполнении условия линейной независимости (13) прямыми вычислениями можно получить следующее представление конуса T_2:

$$T_2 = \left\{ h \in \mathbf{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \min\{\langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle,\, h_i\} = 0,\; i \in I_0, \\ \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle = 0,\; i \in I_1, \\ h_i = 0,\; i \in I_2 \end{array} \right\}.$$

Теперь ясно, что (при дополнительном предположении (13)!) условие (11) равносильно тому, что для любой пары $(A,\, B)$ множеств индексов таких, что $A \cup B = I_0$, $A \cap B = \emptyset$, и для произвольного $h \in \mathbf{R}^m$

$$\left.\begin{array}{l} \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle = 0,\; h_i \geq 0,\; i \in A \\ \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle \geq 0,\; h_i = 0,\; i \in B \\ \langle g_i'(\bar{x}),\, h\rangle = 0,\; i \in I_1 \\ h_i = 0,\; i \in I_2 \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad h = 0. \qquad (14)$$

Непосредственное сравнение (10) и (14) показывает, что b-регулярность всегда подразумевает (11). Обратное неверно, в чем легко убедиться на простых примерах.

6. Накрывание

Определение 4. Будем говорить, что отображение $F : V \to Y$ имеет *свойство накрывания в точке* $\bar{x}$, если для любой окрестности $U \subset V$ точки $\bar{x}$ в X множество $F(U)$ является окрестностью точки $F(\bar{x})$ в Y.

Если F регулярно в точке $\bar{x}$, то, как хорошо известно, F имеет свойство накрывания в точке $\bar{x}$. Этот факт является побочным продуктом стандартной теоремы о существовании неявной функции [29]. Теоремы о накрывании имеют многочисленные приложения; например, они могут использоваться для получения двойственной формы условий оптимальности с помощью подхода, называемого *одновременным накрыванием* [30].

Теорема 4. *Предположим, что выполнены основные гипотезы* (H1)-(H5), *и существует элемент* $h \in T_2$ *такой, что отображение* F *2-регулярно в точке* $\bar{x}$ *на элементе* h.

Тогда F *имеет свойство накрывания в точке* $\bar{x}$, *и найдутся окрестность* W *точки* $F(\bar{x})$ *в* Y *и число* $M > 0$ *такие, что*

$$\operatorname{dist}(\bar{x},\, F^{-1}(y)) \le M(\|R(F(\bar{x}) - y)\| + \\ + \|P(F(\bar{x}) - y)\|^{1/2}) \quad \forall\, y \in W.$$

Если F регулярно в точке $\bar{x}$, то можно применять Теорему 4 с любым $h \in \ker F'(\bar{x})$, даже с $h = 0$, что приводит к стандартной теореме о накрывании для регулярного случая. Для случая F дважды дифференцируемого в точке $\bar{x}$ Теорема 4 была получена в [18].

7. Условия оптимальности

Теперь обратимся к задаче оптимизации с ограничениями-равенствами, т.е. задаче (5) с допустимым множеством D определенным как

$$D = \{x \in V \mid F(x) = 0\}. \tag{15}$$

Целевая функция $f : V \to \mathbf{R}$ предполагается дифференцируемой по Фреше в рассматриваемой точке $\bar{x} \in D$, а отображение F удовлетворяет основным гипотезам (H1)–(H5). Прямая форма условий оптимальности следует немедленно из Теоремы 2 и не будет здесь обсуждаться в деталях. Необходимое условие оптимальности состоит в том, что

$$\langle f'(\bar{x}),\, h\rangle \geq 0 \tag{16}$$

для любого элемента $h \in T_2$ тфкого, что F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на элементе h. Достаточное условие состоит в выполнении (16) как строгого неравенства для любого $h \in T_2 \setminus \{0\}$.

Естественным дальнейшим развитием должна была бы стать двойственная форма условий оптимальности. Предположим на минуту, что F 2-регулярно в точке $\bar{x}$. Тогла, дуализируя прямые необходимые условия, можем заключить, что

$$f'(\bar{x}) \in T_2^*.$$

Трудность здесь состоит в том, что T_2 может иметь весьма сложную структуру, поскольку этот конус определяется нелинейными ограничениями и, в общем случае, не является выпуклым. Без каких-либо дополнительных предположений явное вычисление T_2^*, а значит, и получение ґкрасивойЄ и удобной для использования формы двойственных условий оптимальности, представляется невозможным. Часто весьма непросто вычислить явно даже один элемент $h \in T_2 \setminus \{0\}$. Следовательно, если такой элемент имеется, важно извлечь из него столько локальной информации, сколько возможно. Заметим, что если для некоторого h (16) выполнено как строгое неравен-

ство, то строгое неравенство справедливо для любого элемента в X, достаточно близкого к h. С другой стороны, если (16) выполняется как равенство, то необходим дальнейший анализ (эта ситуация представляет особый интерес также в свете упомянутых выше достаточных условий оптимальности). Ниже предлагаются двойственные необходимые условия оптимальности для случая, когда существует элемент $\bar{h} \in T_2$ такой, что F 2-регулярно в точке $\bar{x}$ на элемент $\bar{h}$, и

$$\langle f'(\bar{x}), \bar{h} \rangle = 0. \tag{17}$$

Доказательство основано на применении подхода одновременного накрывания. Эти необходимые условия зависят от данного $\bar{h}$, который может рассматриваться как параметр.

Теорема 5. *Предположим, что выполнены основные гипотезы* (H1)-(H5), *и* $\bar{h} \in T_2$ *— такой элемент, что отображение* F 2*-регулярно в точке* $\bar{x}$ *на элементе* $\bar{h}$. *Пусть функция* $f : V \to \mathbf{R}$ *дифференцируема по Фреше в точке* $\bar{x}$, *и выполнено (17).*

Если $\bar{x}$ *— локальное решение задачи (5), (15), то существует функционал* $\bar{y}^* = \bar{y}^*(\bar{h}) \in Y^*$ *такой, что*

$$f'(\bar{x}) = (\Psi_2(\bar{h}))^* \bar{y}^*. \tag{18}$$

Ясно, что в регулярном случае Теорема 5 редуцируется к классическим условиям первого порядка оптимальности. Действительно, если выполнено условие регулярности (7), то можно взять $\bar{h} = 0$, и (17) будет выполнено автоматически. Более того, при таком выборе

$\Psi_2(\bar{h}) = F'(\bar{x})$, и (18) превращается в равенство

$$f'(\bar{x}) = (F'(\bar{x}))^* \bar{y}^*,$$

что и дает классические условия оптимальности (принцип Лагранжа) [24, 29]. Теорема 5 является также обобщением родственного результата, полученного в [2].

8. Условия оптимальности для задач оптимизации с комплементарными ограничениями

Этот раздел содержит краткие комментарии по поводу применения полученных выше условий оптимальности к ЗОКО, т.е. к задаче (5) с допустимым множеством D определенным в (6). Здесь обсуждается переформулировка ограничений, аналогичная той, которая использовалась в разделе для комплементарных задач без параметров. В результате получается задача оптимизации с чистыми ограничениями-равенствами, которая, в понятном смысле, эквивалентна исходной задаче.

Видимо, наиболее важным и широко используемым условием регулярности ограничений для ЗОКО является так называемое*кусочное условие регулярности Мангасариана–Фромовица* [31, 32]. Можно показать что условия регулярности, нобходимые для применимости предложенных выше условий оптимальности, слабее чем кусочное УРМФ. Они в определенном смысле эквивалентны при дополнительном предположении, которое прямо подразумевается кусочным УРМФ. При этом предположении может быть получена явная (т.е. в терминах данных исходной задачи) формула для T_2, а также явная интерпретация условия 2-регулярности.

Первый автор благодарит Instituto de Matemática Pura e Aplicada, где он находился во время подготовки этой работы. Второй автор частично поддержан CNPq (грант 300734/95-6), PRONEX–Optimization и FAPERJ.

Список литературы

1. *Третьяков А.А.* Необходимые и достаточные условия оптимальности P-го порядка // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, Г 2. С. 203-209.

2. *Аваков Е.Р.* Условия экстремума для гладких задач с ограничениями типа равенств // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, Г 5. С. 680-693.

3. *Измаилов А.Ф.*, *Третьяков А.А.* Факторанализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.

4. *Измаилов А.Ф.*, *Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физматлит, 1999.

5. *Pang J.-S.* Complementarity problems // Handbook of global optimization. Boston, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, 1995. P. 271–338.

6. Complementarity and variational problems: state of the art. Editors: *Ferris M.C.*, *Pang J.-S.* SIAM Publications, 1997.

7. *Ferris M.C.*, *Kanzow C.* Complementarity and related problems // Handbook of applied optimization. Oxford, Oxford University Press, 2000.

8. *Mangasarian O.L.* Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations // SIAM J. of Applied Mathematics. 1976. V. 31. P. 89–92.

9. *Kanzow C.* Some equation-based methods for the nonlinear complementarity problem // Optimization Methods and Software. 1994. V. 3. P. 327–340.

10. *Sun D.*, *Qi L.* On NCP-functions // Computational Optimization and Applications. 1999. V. 13. P. 201–220.

11. *Tseng P.* Growth behavior of a class of merit functions for the nonlinear complementarity problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 1996. V. 89. P. 17–37.

12. *Kanzow C.*, *Kleinmichel H.* A new class of semismooth Newton-type methods for nonlinear complementarity problems // Computational Optimization and Applications. 1998. V. 11. P. 227–251.

13. Reformulation — nonsmooth, piecewise smooth, semismooth and smoothing methods. Editors: *Fukushima M.*, *Qi L.* Kluwer Academic Publishers, 1999.

14. *Luo Z.-Q.*, *Pang J.-S.*, *Ralph D.* Mathematical programs with equilibrium constraints. Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

15. *Chen Y.*, *Florian M.* The nonlinear bilevel programming problem: formulations, regularity and optimality conditions // Optimization. 1995. V. 32. P. 193–209.

16. *Mangasarian O.L.*, *Fromovitz S.* The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1967. V. 7. P. 37–47.

17. *Аваков Е.Р.* Необходимые условия экстремума для гладких анормальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств // Мат. заметки. 1989. Т. 45. Вып. 6. С. 3-11.

18. *Аваков Е.Р.* Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 5. С. 3-13.

19. *Аваков Е.Р.*, *Аграчев А.А.*, *Арутюнов А.В.* Множество уровня гладкого отображения в окрестности особой точки и нули квадратичного отображения // Мат. сб. 1991. Т. 182. Ґ 8. С.1091-1104.

20. *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные случаи. М.: Факториал, 1997.

21. *Измаилов А.Ф.* О некоторых обобщениях леммы Морса // Тр. Математического института им. В.А.Стеклова. 1998. Т. 220. С. 142-156.

22. *Robinson S.M.* Local structure of feasible sets in nonlinear programming. Part III: stability and sensitivity // Mathematical Programming Study. 1987. V. 30. P. 45–66.

23. *Shapiro A.* On concepts of directional differentiability // Journal of Optimization Theory and Applications. 1990. V. 66. P. 477–487.

24. *Иоффе А.Д.*, *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

25. *Magnus R.J.* On the local structure of the zero-set of a Banach space valued mapping // J. Func. Anal. 1976. V. 22. P. 58–72.

26. *Szulkin A.* Local structure of the zero-sets of differentiable mappings and applications to bifurcation theory // Mathematica Scandnavica. 1979. V. 45. P. 232–242.

27. *Buchner M.*, *Marsden J.*, *Schecter S.* Applications of the blowing-up construction and algebraic geometry to bifurcation problems // J. Differential Equations. 1983. V. 48. P. 404–433.

28. *Pang J.-S.*, *Gabriel S.A.* NE/SQP: a robust algorithm for the nonlinear complementarity problem // Mathematical Programming. 1993. V. 60. P. 295–337.

29. *Алексеев В.М.*, *Тихомиров В.М.*, *Фомин С.В* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

30. *Дмитрук А.В.*, *Милютин А.А.*, *Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, вып. 6. С. 11-46.

31. *Pang J.-S.*, *Fukushima M.* Complementarity constraint qualifications and simplified B-stationarity conditions for mathematical programs with equilibrium constraints // Computational Optimization and Applications. 1999. V. 13. P. 111–136.

32. *Scholtes S., Stöhr M.* Exact penalization of mathematical programs with equilibrium constraints // SIAM J. on Control and Optimization. 1999. V. 37. P. 617–652.