

Alexey Izmailov
Mikhail Solodov

OTIMIZAÇÃO,
VOLUME I

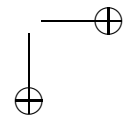
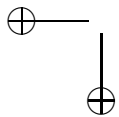
CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE,
ELEMENTOS DE ANÁLISE
CONVEXA E DE DUALIDADE

Segunda Edição

Rio de Janeiro
2009

Copyright © 2009 by Alexey Izmailov and Mikhail Solodov
Direitos reservados, 2009 pela Associação Instituto
Nacional de Matemática Pura e Aplicada -IMPA
Estrada Dona Castorina 110
Rio de Janeiro, RJ 22460-320
Brazil

ISBN 978-85-244-0238-8



Índice

Prefácio	iii
Lista de Notações	vii
1 Introdução à Otimização	1
1.1 Definições e alguns fatos básicos	1
1.2 Existência de soluções globais	7
1.3 Condições de otimalidade para problemas irrestritos	15
1.4 Condições de otimalidade em forma primal	22
2 Problemas com Restrições de Igualdade	38
2.1 Cone tangente para restrições de igualdade	39
2.2 As condições de otimalidade de Lagrange	49
2.3 Condições de otimalidade de segunda ordem	57
3 Elementos de Análise Convexa	66
3.1 Definições e fatos básicos de convexidade	67
3.2 Conjuntos convexos. Teoremas de separação	79
3.2.1 Propriedades básicas de conjuntos convexos	80
3.2.2 O operador de projeção	101
3.2.3 Teoremas de separação	107
3.2.4 Pontos extremos	118
3.3 Teoremas de alternativa	130
3.4 Funções convexas	137

3.4.1	Propriedades básicas das funções convexas	137
3.4.2	Funções convexas diferenciáveis	155
3.4.3	Funções convexas não-diferenciáveis	167
4	Problemas com Restrições de Igualdade e Desigualdade	192
4.1	Cone tangente no caso de restrições mistas	194
4.2	Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker	205
4.3	Condições de otimalidade de segunda ordem	221
5	Elementos da Teoria de Dualidade	239
5.1	Dualidade em programação linear	239
5.2	Dualidade para um problema geral	245
	Referências Bibliográficas	267
	Índice Remissivo	268

Prefácio

No ano 2000, os autores resolveram escrever um livro sobre métodos computacionais de otimização em russo. A motivação de terem escolhido a língua russa se deveu ao fato de que, a partir do ano 1991, o acesso do público russo à literatura científica estrangeira de ponta ficou bastante restrito, por questões econômicas e financeiras. Surgiu, portanto, uma demanda forte por um livro moderno sobre otimização numérica, acessível ao grande público. A única maneira de atender esta demanda foi escrever em russo e buscar apoio de agências governamentais russas para publicar o livro com custos relativamente baixos, tornando assim o produto final acessível. Esta tarefa foi concluída com sucesso, o livro foi publicado em 2003 [1] e já está em sua segunda edição.

Pelo menos em parte, a motivação exposta acima continua válida no caso do Brasil. Pareceu natural então tentar adaptar o livro [1] às necessidades do público brasileiro. No entanto, desde cedo ficou claro que a versão em português não podia ser uma simples tradução. Por exemplo, o livro russo contém apenas uma discussão breve dos aspectos mais clássicos da Otimização, tais como as condições de otimalidade. A razão disso é que o desenvolvimento desta parte da Otimização é bastante anterior aos anos 90 do século passado, e já existem na Rússia muitos livros teóricos excelentes (tanto escritos por matemáticos russos, quanto traduzidos de outros idiomas). O caso do Brasil, porém,

é diferente. Foi decidido, portanto, escrever dois volumes: um dedicado aos aspectos teóricos da Otimização (que está agora na sua segunda edição), e um segundo dedicado aos métodos computacionais [2] (que é uma adaptação, porém não é uma simples tradução do livro russo [1]).

Este volume teórico contém um tratamento rigoroso e completo das condições de otimalidade de primeira e segunda ordem, além de tópicos da Análise Convexa e da teoria de Dualidade. O livro é baseado em cursos de pós-graduação que os autores vêm ministrando na Universidade de Moscou e no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Uma característica do livro que julgamos importante é que ele é auto-contido. Todas as afirmações são provadas de maneira completa e com total rigor matemático, sem apelar a fatos ou resultados externos ao livro (com exceção de algumas noções elementares). Em geral, o livro é dirigido aos estudantes que possuem conhecimentos de Análise Real [4, 5] (topologia do espaço euclidiano, funções reais em \mathbf{R}^n , o Teorema da Função Implícita) e de Álgebra Linear [3] (subespaços, bases, núcleo e imagem, soma direta, produto interno).

O desenvolvimento de condições de otimalidade neste livro é, de certo modo, inovador, pelo menos considerando livros voltados para o ensino. Este desenvolvimento é baseado nas noções de direções tangentes e de cone tangente do conjunto viável do problema. Acreditamos que esta abordagem é a mais natural e permite ao leitor uma melhor intuição geométrica, facilitando assim um entendimento correto do assunto. Isto nem sempre é o caso na literatura, onde com frequência as provas de condições de otimalidade fazem apelo a técnicas e objetos um pouco artificiais para o primeiro curso de Otimização (tais como penalização, Lagrangianas aumentadas, transformação de restrições de desigualdade em restrições de igualdade, entre outras). Além do mais, as condições de otimalidade baseadas no cone tangente permitem um desenvolvimento unificado e natural para vários formatos de conjunto viável do problema a resolver (descrição abstrata, restrições de igualdade, de desigualdade, restrições mis-

tas) e para várias condições de regularidade das restrições (linearidade, condição de independência linear dos gradientes das restrições ativas, condição de Mangasarian-Fromovitz, condição de Slater). O tratamento das questões associadas às condições de otimalidade neste livro é bastante completo.

O objetivo do capítulo dedicado à Análise Convexa consiste em apresentar apenas o material indispensável para qualquer pessoa que está iniciando seus estudos em Otimização. Em particular, este capítulo não apresenta a Análise Convexa como uma disciplina independente e não se recomenda sua utilização para um curso da Análise Convexa (porém, pode servir como boa base para tal curso). O mesmo se aplica ao capítulo dedicado à Dualidade.

O livro contém muitas figuras para facilitar a exposição e muitos exercícios para fixar conhecimentos. Alguns dos exercícios são fáceis de resolver; outros são não-triviais e podem ser utilizados como desafio para alunos avançados.

Ao terminar, agradecemos a Claudia Sagastizábal, Alfredo Iusem e Elon Lages Lima pela leitura das versões preliminares, fazendo várias correções, a Luis Mauricio Graña Drummond, pela leitura especialmente cuidadosa, e a Paulo Sad pela revisão do manuscrito final.

Alexey Izmailov, Moscou, abril de 2008

Mikhail Solodov, Rio de Janeiro, abril de 2008